MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Numéro du candidat

Jeudi 6 mai 2004 (après-midi)

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de candidat dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé.
- Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, les réponses numériques devront être exactes ou à trois chiffres significatifs près.
- Veuillez indiquer la marque et le modèle de votre calculatrice dans les cases appropriées sur la page de couverture (par exemple, Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Le maximum des points sera attribué aux réponses correctes. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Si cela est nécessaire, les calculs peuvent être poursuivis en dessous de la case réservée à la réponse. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces graphes dans votre réponse.

1. Le polynôme $x^2 - 4x + 3$ est un facteur de $x^3 + (a-4)x^2 + (3-4a)x + 3$.
Calculez la valeur de la constante a.

Résolution :

Réponse :

2. Étant donné que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x - 2x$ et que $y = 3$ quand $x = 0$, trouvez une expression de y en fonction de x.

Résolution :

Réponse :

3. Pour $-3 \le x \le 3$, trouvez les coordonnées des points d'intersection des courbes

$$y = x\sin x \quad \text{et} \quad x + 3y = 1 .$$

Résolution :

Réponse :

4. Les trois termes a, 1, b forment une suite arithmétique. Les trois termes 1, a, b forment une suite géométrique. Déterminez les valeurs de a et b sachant que $a \neq b$.

Résolution :

Réponse :

5. Les transformations linéaires $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{S}$ sont représentées par les matrices

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donnez une description géométrique complète de l'unique transformation représentée par la matrice $\boldsymbol{SMS}$.

Résolution :

Réponse :

6. Soit z le nombre complexe donné par

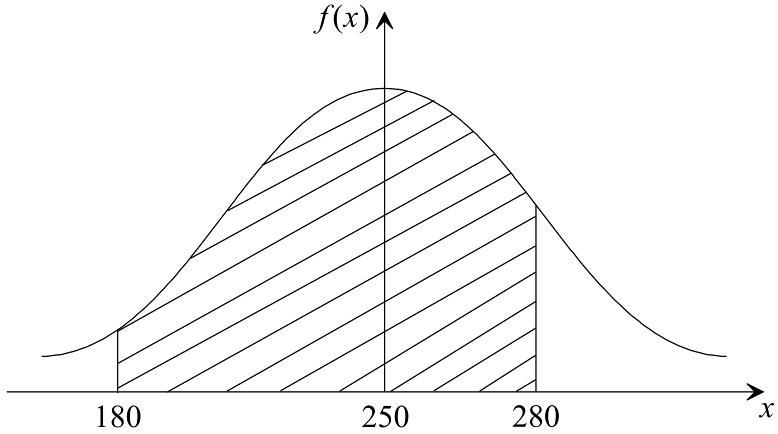
$$z = 1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i} - \sqrt{3}}.$$

Exprimez z sous la forme $a + b\mathrm{i}$, en donnant les valeurs **exactes** des constantes réelles a et b.

Résolution :

Réponse :

7. La figure ci-dessous montre la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X, qui est normalement distribuée avec une moyenne de 250 et un écart-type de 50.



Déterminez la probabilité représentée par la région hachurée.

Résolution :

Réponse :

8. Le point $\mathrm{P}(1;\, p)$, où $p > 0$, est sur la courbe $2x^2 y + 3y^2 = 16$.

(a) Calculez la valeur de p.

(b) Calculez la pente de la tangente à cette courbe en P.

Résolution :

Réponses :

(a) ______________________________

(b) ______________________________

9. La droite $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} + \mu(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$ et le plan $2x - y + z + 2 = 0$ se coupent au point P. Trouvez les coordonnées de P.

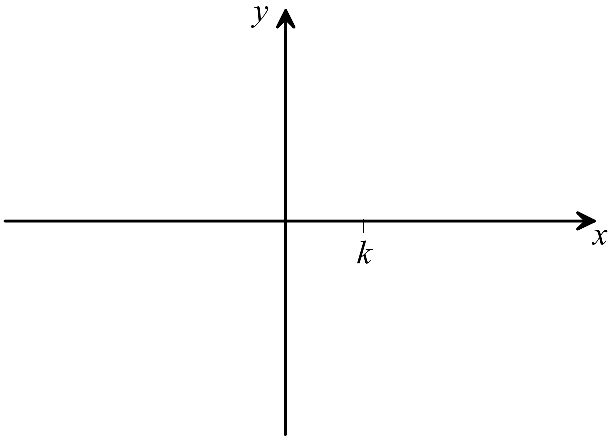
Résolution :

Réponse :

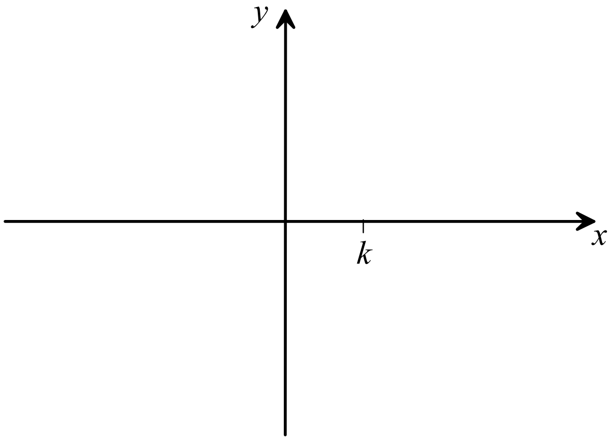
____

10. Soit $f(x) = \dfrac{k}{x-k}, x \neq k, k > 0$.

(a) Sur la figure ci-dessous, faites le croquis de la courbe représentant *f*. Légendez clairement tous les points d'intersection avec les axes, et toutes les asymptotes.



(b) Sur la figure ci-dessous, faites le croquis de la courbe représentant $\dfrac{1}{f}$. Légendez clairement tous les points d'intersection avec les axes.



Résolution :

11. La fonction f est définie par $f : x \mapsto x^3$.

Trouvez une expression de $g(x)$ en fonction de x dans chacun des cas suivants

(a) $(f \circ g)(x) = x + 1$;

(b) $(g \circ f)(x) = x + 1$.

Résolution :

Réponses :

(a) ______________________________

(b) ______________________________

12. (a) Trouvez $\int_0^m \frac{\mathrm{d}x}{2x+3}$, donnez votre réponse en fonction de m.

(b) Étant donné que $\int_0^m \frac{\mathrm{d}x}{2x+3} = 1$, calculez la valeur de m.

Résolution :

Réponses :

(a) ______________________

(b) ______________________

13. La variable aléatoire discrète X a la distribution de probabilité suivante.

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x}, \; x = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ 0, \text{ dans les autres cas} \end{cases}$$

Calculez

(a) la valeur de la constante k ;

(b) $\mathrm{E}(X)$.

Résolution :

Réponses :

(a) ______________________

(b) ______________________

14. Chaque jour de la semaine du lundi au vendredi, Robert va au travail en train. La probabilité qu'il attrape le train de 08h00 le lundi est 0,66. Pour chacun des quatre autres jours de la semaine, la probabilité qu'il attrape le train de 08h00 est 0,75. Un jour de semaine est choisi au hasard.

(a) Trouvez la probabilité qu'il attrape son train ce jour-là.

(b) Étant donné qu'il prend le train de 08h00 ce jour-là, trouvez la probabilité que le jour qui a été choisi est un lundi.

Résolution :

Réponses :

(a) ____________________

(b) ____________________

15. Étant donné que $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \times (-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k})$,

(a) trouvez $\boldsymbol{a}$;

(b) trouvez la projection vectorielle de $\boldsymbol{a}$ sur le vecteur $-2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Résolution :

Réponses :

(a) ____________________

(b) ____________________

16. Résolvez l'inéquation

$$\left|\frac{x+9}{x-9}\right| \le 2 .$$

Résolution :

Réponse :

17. La fonction f est définie par $f : x \mapsto 3^x$.

Trouvez la solution de l'équation $f''(x) = 2$.

Résolution :

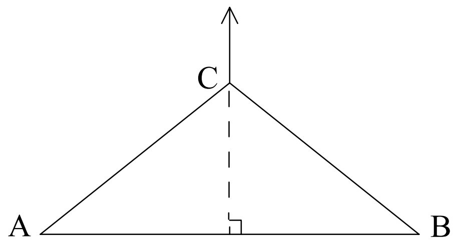
Réponse :

18. Trouvez $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

Résolution :

Réponse :

19. La figure ci-dessous montre un triangle isocèle ABC avec AB = 10 cm et AC = BC. Le sommet C se déplace perpendiculairement à (AB) à la vitesse de 2 cm par seconde.



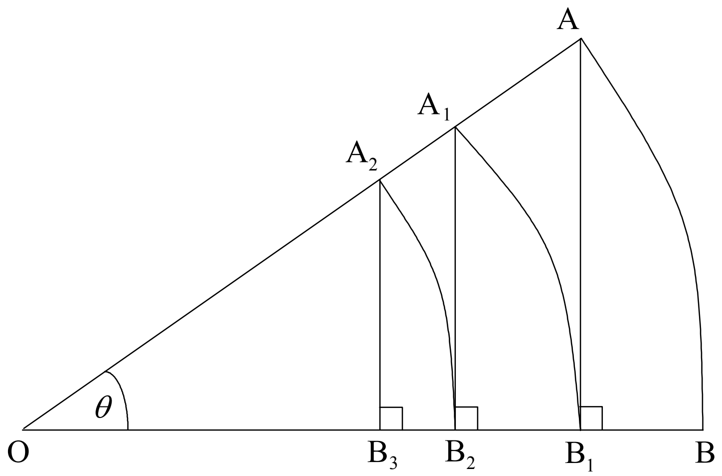
Calculez le taux d'accroissement de l'angle CAB au moment où le triangle est équilatéral.

Résolution :

Réponse :

20. La figure représente un secteur AOB d'un cercle de rayon 1 et de centre O, où $A\hat{O}B = \theta$.

Les droites $(AB_1), (A_1B_2), (A_2B_3)$ sont perpendiculaires à OB. A_1B_1, A_2B_2 sont tous des arcs de cercle de centre O.



Calculez la somme infinie des longueurs des arcs

$$AB + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \ldots$$

Résolution :

Réponse :

____