MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 2

Mardi 6 mai 2003 (matin)

3 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé.
- Répondez à toutes les questions de la section A et à une question de la section B.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, les réponses numériques devront être exactes ou à trois chiffres significatifs près.
- Veuillez indiquer la marque et le modèle de votre calculatrice dans les cases appropriées sur la page de couverture (par exemple, Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces graphes dans votre réponse.

SECTION A

*Répondez aux **cinq** questions de cette section.*

1. *[Note maximum : 12]*

La fonction f est définie par $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$, pour $x > 0$.

(a) (i) Montrez que

$$f'(x) = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}$$

(ii) Déterminez une expression de $f''(x)$, et simplifiez votre réponse autant que possible. *[5 points]*

(b) (i) Trouvez la valeur **exacte** de x satisfaisant l'équation $f'(x) = 0$.

(ii) Montrez que cette valeur donne une valeur maximum pour $f(x)$. *[4 points]*

(c) Donnez les abscisses des deux points d'inflexion de la courbe représentant f. *[3 points]*

2. *[Note maximum : 16]*

(i) Les transformations $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$, dans le plan sont définies de la manière suivante:

$\boldsymbol{T}_1$: Une rotation de 180° autour de l'origine.
$\boldsymbol{T}_2$: Une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = x$.
$\boldsymbol{T}_3$: Une rotation de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autour de l'origine.

(a) Écrivez les matrices 2×2 représentant $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2$ et $\boldsymbol{T}_3$. *[3 points]*

(b) La transformation $\boldsymbol{T}$ est définie comme $\boldsymbol{T}_1$ suivie de $\boldsymbol{T}_2$ suivie de $\boldsymbol{T}_3$.

(i) Trouvez la matrice 2×2 représentant $\boldsymbol{T}$.

(ii) Donnez une description géométrique complète de la transformation $\boldsymbol{T}$. *[4 points]*

(ii) Les variables x, y, z vérifient le système d'équations

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= k \\ 2x + y + 4z &= 6 \\ x - 4y + 5z &= 9 \end{aligned}$$

où k est une constante.

(a) (i) Montrez que ce système d'équations **n**'a **pas** une solution unique.

(ii) Déterminez la valeur de k pour laquelle les équations sont compatibles (c'est-à-dire le système peut être résolu). *[6 points]*

(b) Trouvez la solution générale de ce système pour cette valeur de k. *[3 points]*

3. *[Note maximum : 15]*

(a) Démontrez par récurrence que pour un entier positif *n*,

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \text{ où } \mathrm{i}^2 = -1.$$ *[5 points]*

(b) Le nombre complexe *z* est défini par $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

(i) Montrez que $\frac{1}{z} = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)$.

(ii) Déduisez que $z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta$. *[5 points]*

(c) (i) Trouvez le développement binomial de $(z + z^{-1})^5$.

(ii) À partir de là, montrez que $\cos^5\theta = \frac{1}{16}(a\cos 5\theta + b\cos 3\theta + c\cos\theta)$, où *a*, *b*, *c* sont des entiers positifs à déterminer. *[5 points]*

4. *[Note maximum : 11]*

Un homme d'affaires passe *X* heures au téléphone pendant la journée. La fonction de densité de probabilité de *X* est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(8x - x^3), & \text{pour } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

(a) (i) Écrivez une intégrale dont la valeur est $\mathrm{E}(X)$.

(ii) À partir de là , évaluez $\mathrm{E}(X)$. *[3 points]*

(b) (i) Montrez que la médiane, *m*, de *X* satisfait l'équation

$$m^4 - 16m^2 + 24 = 0.$$

(ii) À partir de là, évaluez *m*. *[5 points]*

(c) Évaluez le mode de *X*. *[3 points]*

5. *[Note maximum : 16]*

La fonction f est définie sur le domaine $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

Cette fonction peut aussi être exprimée sous la forme $R\cos(x-\alpha)$ où $R > 0$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(a) Trouvez les valeurs **exactes** de R et de α. *[3 points]*

(b) (i) Trouvez le co-domaine de la fonction f.

(ii) Dites, en donnant une justification, si la fonction réciproque de f existe ou n'existe pas. *[5 points]*

(c) Trouvez la valeur **exacte** de x satisfaisant l'équation $f(x) = \sqrt{2}$. *[3 points]*

(d) En utilisant le fait que

$$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C, \text{ où } C \text{ est une constante,}$$

montrez que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{3}\right).$$ *[5 points]*

SECTION B

*Répondez à **une** question de cette section.*

Statistiques

6. *[Note maximum : 30]*

(i) *Donnez toutes les réponses numériques pour cette partie de la question avec **deux** chiffres après la virgule.*

Un radar enregistre les vitesses, v kilomètres par heure, des voitures sur une route. La vitesse de ces voitures est normalement distribuée. Les enregistrements pour 1000 voitures sont reportés dans le tableau suivant.

Vitesse	Nombre de voitures
$40 \le v < 50$	9
$50 \le v < 60$	35
$60 \le v < 70$	93
$70 \le v < 80$	139
$80 \le v < 90$	261
$90 \le v < 100$	295
$100 \le v < 110$	131
$110 \le v < 120$	26
$120 \le v < 130$	11

(a) Pour les voitures sur la route, calculez

(i) une estimation sans biais de la vitesse moyenne ;

(ii) une estimation sans biais de la variance de la vitesse. *[4 points]*

(b) Pour les voitures sur la route, calculez

(i) un intervalle de confiance à $95\,\%$ pour la vitesse moyenne ;

(ii) un intervalle de confiance à $90\,\%$ pour la vitesse moyenne. *[4 points]*

(c) Expliquez pourquoi l'un des intervalles trouvés dans la partie (b) est un sous-ensemble de l'autre. *[2 points]*

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 6)

(ii) *Donnez toutes les réponses numériques pour cette partie de la question avec **trois** chiffres significatifs.*

On a donné une série de tests à compléter à deux personnes. En moyenne, M. Brown a fait 2,7 fautes par test tandis que M. Smith a fait 2,5 fautes par test. On admet que le nombre de fautes faites par n'importe quelle personne est distribué selon une loi de Poisson.

(a) Pour un test particulier, calculez la probabilité

(i) que M. Brown ait fait **deux** fautes ;

(ii) que M. Smith ait fait **trois** fautes ;

(iii) que M. Brown ait fait **deux** fautes et M. Smith ait fait **trois** fautes. *[6 points]*

(b) Pour un autre test, M. Brown et M. Smith ont fait collectivement un total de **cinq** fautes. Calculez la probabilité que M. Brown **ait fait moins de fautes** que M. Smith. *[5 points]*

(iii) Un ordinateur génère une suite aléatoire de chiffres. Un échantillon de 200 chiffres est sélectionné au hasard parmi les 100 000 premiers chiffres de la suite. Le tableau suivant donne le nombre de fois que chaque chiffre apparaît dans cet échantillon.

chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
effectif	17	21	15	19	25	27	19	23	18	16

Il est affirmé que tous les chiffres ont la même probabilité d'apparaître dans la suite.

(a) Testez cette affirmation à un seuil de $5\,\%$. *[7 points]*

(b) Expliquez ce que signifie l'expression « à un seuil de 5 % ». *[2 points]*

Ensembles, relations et groupes

7. *[Note maximum : 30]*

(i) L'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels est un groupe $(\mathbb{R}, +)$ pour l'addition, et l'ensemble $\mathbb{R}^+$ de tous les nombres réels positifs est un groupe $(\mathbb{R}^+, \times)$ pour la multiplication. On note f l'application de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^+, \times)$ définie par $f(x) = 3^x$.

(a) Montrez que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}^+, \times)$. *[6 points]*

(b) Trouvez une expression pour f^{-1}. *[1 point]*

(ii) Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{R}, \text{ et } ad - bc \neq 0 \right\}$.

(a) Montrez que $(G, *)$ est un groupe, $*$ notant la multiplication des matrices. *[6 points]*

(b) Est-ce que ce groupe est abélien ? Donnez une raison justifiant votre réponse. *[3 points]*

Soit $(H, *)$ un sous-groupe quelconque de $(G, *)$ et soit $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ deux éléments quelconques de G.

Définissez la relation R_H sur G de la façon suivante :

$$\boldsymbol{M} R_H \boldsymbol{N} \Leftrightarrow \text{ il existe } \boldsymbol{L} \in H \text{ tel que } \boldsymbol{M} = \boldsymbol{L} * \boldsymbol{N} .$$

(c) Montrez que R_H est une relation d'équivalence sur G. *[5 points]*

Soit K l'ensemble de tous les éléments de G tels que $ad - bc > 0$.

(d) Montrez que $(K, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$. *[5 points]*

Soit $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ deux éléments quelconques de G. Définissez la relation R_K sur G comme ci-dessus, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{M} R_K \boldsymbol{N} \Leftrightarrow \text{ il existe } \boldsymbol{L} \in K \text{ tel que } \boldsymbol{M} = \boldsymbol{L} * \boldsymbol{N} .$$

(e) (i) Montrez qu'il y a seulement deux classes d'équivalence.

(ii) Expliquez comment déterminer à quelle classe d'équivalence appartient un élément $\boldsymbol{M}$ donné de G. *[4 points]*

Mathématiques discrètes

8. *[Note maximum : 30]*

(i) (a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouvez des entiers x et y tels que $17x+31y=1$. *[3 points]*

(b) Sachant que $17p+31q=1$, montrez que $|p|\geq 11$ et $|q|\geq 6$, avec $p,q\in\mathbb{Z}$. *[2 points]*

(ii) Soit $\{y_n\}$ la suite de nombre réels définie ci-dessous :

$y_0=-1$; $y_{n+1}=2y_n+3$ pour $n=0,1,2,\ldots$

Résolvez la relation de récurrence pour y_n. *[6 points]*

(iii) On considère la matrice $\boldsymbol{M}$ suivante.

$$\begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Dessinez un graphe planaire G comportant 5 sommets A, B, C, D, E tels que $\boldsymbol{M}$ soit sa matrice associée. *[7 points]*

(b) Donnez une raison pour laquelle G admet un circuit eulérien. *[3 points]*

(c) Trouvez un circuit eulérien dans G. *[3 points]*

(d) Trouvez un arbre couvrant dans G. *[2 points]*

(iv) Soit W l'ensemble $\{a,b,c,d,f,e,g\}$.

Construisez une arborescence de recherche binaire pour constituer un index en ordre alphabétique pour cet ensemble, en prenant comme racine c (c'est-à-dire en commençant par c). *[4 points]*

Analyse et approximation

9. *[Note maximum : 30]*

Dans cette question, vous donnerez, lorsque cela conviendra, vos réponses avec **cinq** *chiffres après la virgule.*

(i) (a) Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = 1 + \cos x$, pour $x \in [-3, 2]$.

(i) Dans le même repère, faites un croquis des courbes de $f(x)$ et $g(x)$.

(ii) Marquez et légendez les points d'intersection des courbes. *[4 points]*

On considère l'équation $\mathrm{e}^x = 1 + \cos x$.

(b) En utilisant la méthode de Newton-Raphson, résolvez l'équation. *[9 points]*

(c) (i) Utilisez, avec $h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - \cos x + x$, une itération vers le point fixe pour trouver la solution négative de l'équation.

(ii) Expliquez pourquoi cette méthode fonctionne dans ce cas. *[5 points]*

(d) (i) Donnez un exemple pour montrer qu'une itération vers le point fixe ne fonctionne pas pour trouver la solution positive de l'équation.

(ii) Expliquez pourquoi cette méthode ne fonctionne pas dans ce cas. *[5 points]*

(ii) Soit pour tous entiers k et n positifs

$$u_k = \frac{1 + 2(-1)^k}{k+1} \text{ et } S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k .$$

(a) Montrez que $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k-1}{2k(2k+1)}$. *[3 points]*

(b) À partir de là, ou par toute autre méthode, déterminez si la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ est convergente ou non, en justifiant votre réponse. *[4 points]*

Géométrie euclidienne et sections coniques

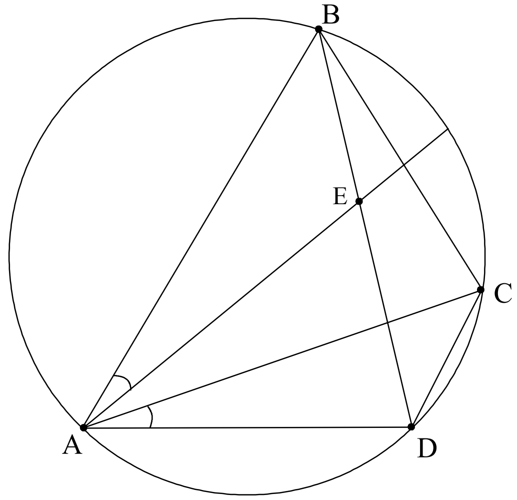
10. *[Note maximum : 30]*

(i) Une section conique a comme équation $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 24 = 0$.

(a) Déterminez si cette conique est une parabole, une ellipse ou une hyperbole. *[3 points]*

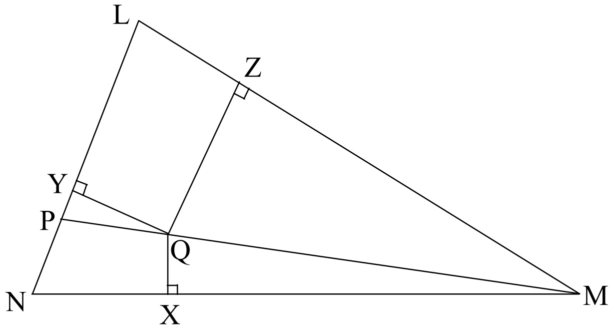
(b) Les droites ℓ_1 et ℓ_2 sont tangentes à la conique de la partie (a), et sont parallèles à la droite d'équation $x - 2y - 12 = 0$. Trouvez les équations de ℓ_1 et de ℓ_2. *[8 points]*

(ii) Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle. Le point E est sur [BD] de telle façon que $\mathrm{B\hat{A}E} = \mathrm{C\hat{A}D}$, comme le montre la figure ci-dessous.



Démontrez que $\mathrm{AC} \times \mathrm{BD} = \mathrm{AB} \times \mathrm{CD} + \mathrm{BC} \times \mathrm{AD}$. *[10 points]*

(iii) Soit Q un point à l'intérieur d'un triangle LMN. Soit X, Y, Z les pieds des perpendiculaires issues de Q sur [MN], [NL] et [LM] respectivement. La droite (MQ) rencontre [LN] au point P.



Démontrez que $\mathrm{L\hat{Q}N} = \mathrm{L\hat{M}N} + \mathrm{X\hat{Y}Z}$. *[9 points]*