



MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 1

Numéro du candidat

--	--	--	--	--	--	--	--

Lundi 5 mai 2003 (après-midi)

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de candidat dans la case ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé.
- Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, les réponses numériques devront être exactes ou à trois chiffres significatifs près.
- Veuillez indiquer la marque et le modèle de votre calculatrice dans les cases appropriées sur la page de couverture (par exemple, Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Le maximum des points sera attribué aux réponses correctes. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Si cela est nécessaire, les calculs peuvent être poursuivis en dessous de la case réservée à la réponse. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des graphiques sont utilisés pour trouver la solution, veuillez inclure un croquis de ces graphes dans votre réponse.

1. Tous les termes d'une série géométrique sont positifs. La somme des deux premiers termes est 15 et la somme jusqu'à l'infini est 27. Trouvez la valeur
- (a) de la raison (ou rapport commun) ;
 - (b) du premier terme.

Résolution :

Réponses :

- (a) _____
(b) _____

2. Trouvez toutes les valeurs de θ dans l'intervalle $[0, \pi]$ qui vérifient l'équation

$$\cos 2\theta = \sin^2 \theta .$$

Résolution :

Réponses :

- _____

3. Sachant que $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ et $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, trouvez $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Résolution :

Réponse :

4. Le polynôme $x^3 + ax^2 - 3x + b$ est divisible par $(x - 2)$ et donne un reste égal à 6 dans la division par $(x + 1)$. Trouvez les valeurs de a et de b .

Résolution :

Réponses :

5. Sachant que $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, trouvez les valeurs de λ pour lesquelles $(A - \lambda I)$ est une matrice singulière.

Résolution :

Réponses :

6. Lorsqu'un garçon joue un jeu dans une fête foraine, la probabilité qu'il gagne un prix est 0,25. Il joue le jeu 10 fois. Soit X le nombre total de prix qu'il gagne. En supposant que les jeux soient indépendants, trouvez
- (a) $E(X)$;
 - (b) $P(X \leq 2)$.

Résolution :

Réponses :

(a) _____

(b) _____

7. La fonction f est définie par $f(x) = 2 - x^2 - e^x$.

Écrivez

- (a) la valeur maximum de $f(x)$;
- (b) les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Résolution :

Réponses :

- (a) _____
- (b) _____

8. Dans le triangle ABC, $\hat{A} = 30^\circ$, $BC = 3$ et $AB = 5$. Trouvez les deux valeurs possibles de \hat{B} .

Résolution :

Réponses :

- _____
- _____

9. Les événements indépendants A, B sont tels que $P(A) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,88$. Trouvez

(a) $P(B)$;

(b) la probabilité que soit A se produise soit B se produise, **mais pas** les deux.

Résolution :

Réponses :

(a) _____

(b) _____

10. Une courbe a pour équation $x^3y^2 = 8$. Trouvez l'équation de la normale à cette courbe au point $(2; 1)$.

Résolution :

Réponse :

11. Le nombre complexe z satisfait l'équation

$$\sqrt{z} = \frac{2}{1-i} + 1 - 4i.$$

Exprimez z sous la forme $x + iy$ où $x, y \in \mathbb{Z}$.

Résolution :

Réponse :

12. Déterminez la valeur **exacte** de x satisfaisant l'équation

$$(3^x)(4^{2x+1}) = 6^{x+2}.$$

Donnez votre réponse sous la forme $\frac{\ln a}{\ln b}$ où $a, b \in \mathbb{Z}$.

Résolution :

Réponse :

13. Résolvez l'inéquation $|x - 2| \geq |2x + 1|$.

Résolution :

Réponse :

14. La variable aléatoire X est normalement distribuée et

$$P(X \leq 10) = 0,670$$

$$P(X \leq 12) = 0,937.$$

Trouvez $E(X)$.

Résolution :

Réponse :

15. Le point A est le pied de la perpendiculaire issue du point $(1; 1; 9)$ au plan $2x + y - z = 6$.
Trouvez les coordonnées de A.

Résolution :

Réponse :

16. Une particule se déplace en ligne droite. Sa vitesse $v \text{ ms}^{-1}$ après t secondes est donnée par $v = e^{-\sqrt{t}} \sin t$. Trouvez la distance totale parcourue pendant l'intervalle de temps $[0, 2\pi]$.

Résolution :

Réponse :

17. La fonction f est définie pour $x \leq 0$ par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Trouvez une expression de $f^{-1}(x)$.

Résolution :

Réponse :

18. En utilisant la substitution $y = 2 - x$ ou par toute autre méthode, trouvez $\int \left(\frac{x}{2-x} \right)^2 dx$.

Résolution :

Réponse :

19. Une enseignante prend sa voiture pour aller à l'école. Elle note le temps qu'elle met pour chacune de 20 journées choisies au hasard. Elle constate que

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 626 \text{ et que } \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 19780,8$$

avec x_i représentant le temps, en minutes, mis pour le $i^{\text{ème}}$ jour.

Calculez une estimation sans biais

- (a) du temps moyen mis pour aller à l'école ;
- (b) de la variance du temps mis pour aller à l'école.

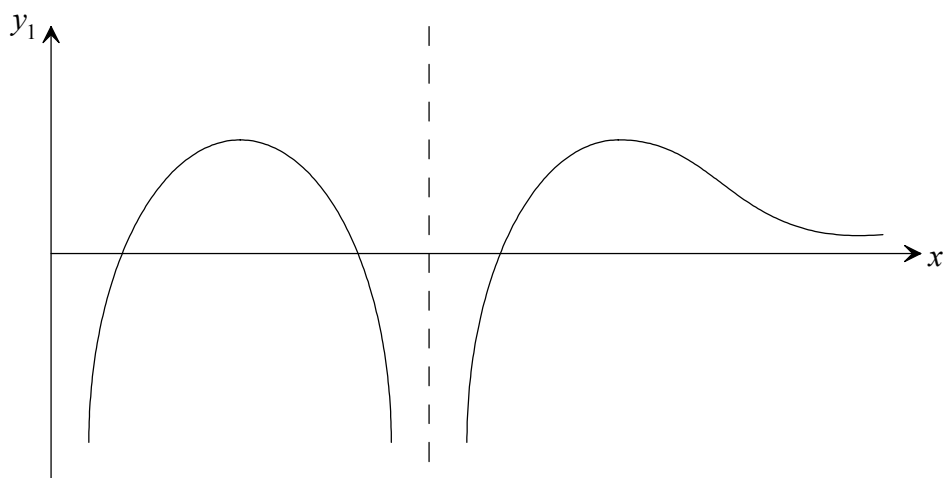
Résolution :

Réponses :

(a) _____

(b) _____

20. La figure ci-dessous représente la courbe de $y_1 = f(x)$.



Sur le repère ci-dessous, faites le croquis de la courbe de $y_2 = |f'(x)|$.

