IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Miércoles 8 de mayo de 2002 (mañana)

3 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta. Una respuesta incorrecta sin indicación del método utilizado no recibirá normalmente ***ningún*** *punto.*

SECCIÓN A

Conteste las **cinco** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 16]*

Los puntos A, B, C y D tienen las siguientes coordenadas:

A : (1, 3, 1) B : (1, 2, 4) C : (2, 3, 6) D : (5, – 2, 1) .

(a) (i) Calcule el producto vectorial $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, exprese su respuesta en función de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

(ii) Halle el área del triángulo ABC . *[6 puntos]*

Llamamos Π al plano que contiene los puntos A, B y C, y L a la recta que pasa por D y es perpendicular a Π. El punto de intersección de L y Π es P .

(b) (i) Halle la ecuación cartesiana de Π.

(ii) Halle la ecuación cartesiana de L. *[5 puntos]*

(c) Halle las coordenadas de P . *[3 puntos]*

(d) Halle la distancia perpendicular de D a Π. *[2 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 12]*

La función $y = f(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$2x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \qquad (x > 0)$$

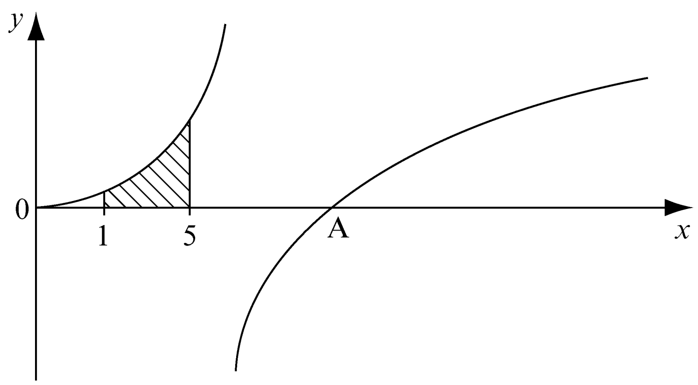
(a) (i) Sustituyendo $y = vx$, demuestre que

$$2x \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = (v-1)^2 .$$

(ii) A partir de aquí demuestre que la solución de la ecuación diferencial original es $y = x - \dfrac{2x}{(\ln x + c)}$, donde c es una constante arbitraria.

(iii) Halle el valor de c, sabiendo que $y = 2$ cuando $x = 1$. *[7 puntos]*

(b) A continuación aparece la gráfica de $y = f(x)$. La gráfica corta el eje de las x en A.



(i) Escriba la ecuación de la asíntota vertical.

(ii) Halle el valor **exacto** de la coordenada x del punto A.

(iii) Halle el área de la región sombreada. *[5 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

(i) (a) Halle el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

[1 punto]

(b) Halle el valor de λ para el cual se puede resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

[3 puntos]

(c) Para este valor de λ, halle la solución general del sistema de ecuaciones. *[3 puntos]*

(ii) (a) Demuestre por inducción matemática que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para todos los valores enteros y positivos de n. *[5 puntos]*

(b) Determine si este resultado es cierto o no para $n = -1$. *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 13]*

Dos niños, Juan y Rosa, arrojan cada uno dos dados equilibrados simultáneamente. La puntuación obtenida por cada niño es la suma de los dos números que muestran sus respectivos dados.

(a) (i) Calcule la probabilidad de que Juan obtenga 9 puntos .

(ii) Calcule la probabilidad de que Juan y Rosa obtengan ambos 9 puntos. *[2 puntos]*

(b) (i) Calcule la probabilidad de que Juan y Rosa obtengan el mismo número de puntos.

(ii) Deduzca la probabilidad de que Juan obtenga más puntos que Rosa. *[4 puntos]*

(c) Sea X el mayor número que aparece en los cuatro dados.

(i) Demuestre que $\mathrm{P}(X \le x) = \left(\frac{x}{6}\right)^4$, para $x = 1, 2, ... 6$

(ii) Copie y rellene la siguiente tabla de distribución de probabilidad

x	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{1296}$	$\frac{15}{1296}$				$\frac{671}{1296}$

(iii) Calcule $\mathrm{E}(X)$. *[7 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 15]*

La funcion f se define como

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} .$$

(a) (i) Halle una expresión de $f'(x)$, simplificando su respuesta.

(ii) Las tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos A y B son paralelas al eje de las x. Halle las coordenadas de A y de B . *[5 puntos]*

(b) (i) Trace de forma aproximada la gráfica de $y = f'(x)$.

(ii) Halle el valor de las coordenadas según x de los tres puntos de inflexión de la gráfica de f . *[5 puntos]*

(c) Halle el recorrido de

(i) f ;

(ii) la función compuesta $f \circ f$. *[5 puntos]*

SECCIÓN B

Conteste **una** *pregunta de esta sección.*

Estadística

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La variable aleatoria X tiene distribución de Poisson, con media μ y satisface a $P(X = 3) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

(a) Halle el valor de μ con cuatro cifras decimales. *[3 puntos]*

(b) Calcule $P(2 \le X \le 4)$ para este valor de μ . *[3 puntos]*

(ii) Se sabe que los pesos de los enfermeros de un hospital tienen distribución normal, con media $\mu = 72$ kg y desviación típica $\sigma = 7{,}5$ kg . El hospital tiene un ascensor cuya carga máxima recomendada es de 450 kg. Seis enfermeros entran en el ascensor. Calcule la probabilidad p de que la suma de su peso supere la carga máxima recomendada. *[5 puntos]*

(iii) Se sabe que el rendimiento de cualquier variedad de maíz (es decir, la cantidad de grano cosechada por unidad de área) tiene distribución normal.

Un granjero ha plantado ocho campos con una misma variedad de maíz, cuyo rendimiento, en toneladas por hectárea, se indica en la siguiente tabla:

Campo	1	2	3	4	5	6	7	8
Rendimiento	10,1	8,6	9,8	8,7	9,1	9,3	9,7	9,9

También ha plantado otros seis campos con otra variedad de maíz, con el rendimiento en toneladas por hectárea indicado en la siguiente tabla:

Campo	A	B	C	D	E	F
Rendimiento	8,9	8,2	9,4	7,9	9,1	8,1

Se puede suponer que el rendimiento tiene la misma varianza para ambas variedades.

Con un nivel de significación del 5%, pruebe la hipótesis de que ambas variedades tienen igual rendimiento comparándola con la alternativa de dos colas y enunciando claramente ambas hipótesis. *[10 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6 continuación)

(iv) Seis monedas son arrojadas simultáneamente 320 veces con los resultados siguientes:

0 cruces	5 veces
1 cruz	40 veces
2 cruces	86 veces
3 cruces	89 veces
4 cruces	67 veces
5 cruces	29 veces
6 cruces	4 veces

Pruebe, con nivel de significación del 5%, la hipótesis de que todas las monedas son equilibrados. *[9 puntos]*

Conjuntos, relaciones y grupos

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Sean A , B y C subconjuntos de un conjunto universal dado.

(a) Use un diagama de Venn para mostrar que

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) .$$ *[2 puntos]*

(b) A partir de aquí, y usando la ley de De Morgan, muestre que

$$(A' \cap B) \cup C' = (A \cap C)' \cap (B' \cap C)' .$$ *[3 puntos]*

(ii) Sea R una relación en $\mathbb{Z}$ tal que para $m \in \mathbb{Z}^+$, $x \; R \; y$ si y sólo si m es divisor de $x - y$, donde x , $y \in \mathbb{Z}$.

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. *[4 puntos]*

(b) Demuestre que esta relación de equivalencia divide $\mathbb{Z}$ en m clases distintas. *[4 puntos]*

(c) Sea $\mathbb{Z}_m$ el conjunto de todas las clases de equivalencia halladas en la parte (b). Defina una operación binaria adecuada $+_m$ en $\mathbb{Z}_m$ y demuestre que $(\mathbb{Z}_m , +_m)$ es un grupo abeliano aditivo. *[5 puntos]*

(d) Sea $(K , \Diamond)$ un grupo cíclico de orden m . Demuestre que $(K , \Diamond)$ es isomórfico con $\mathbb{Z}_m$. *[4 puntos]*

(iii) Sea $(G , \circ)$ un grupo con subgrupos $(H , \circ)$ y $(K , \circ)$. Demuestre que $(H \cup K , \circ)$ es un subgrupo de $(G , \circ)$ si y sólo si uno de los conjuntos H y K está contenido dentro del otro. *[8 puntos]*

Matemáticas discretas

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Use el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de 568 y 208 . *[3 puntos]*

(b) A partir de aquí o de otra manera, halle dos enteras m y n tales que $568m - 208n = 8$. *[4 puntos]*

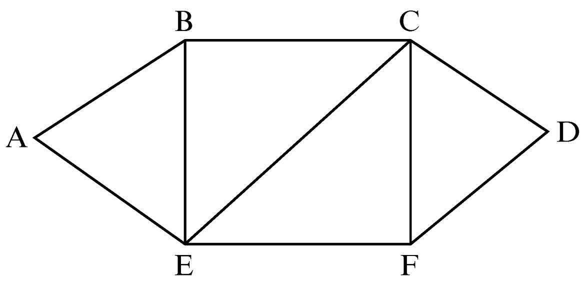
(ii) Se dice de un grafo que está coloreado de n colores si se puede asignar un color a cada vértice de modo tal que cada vértice tenga un color distinto de los colores de todos los vértices que le son adyacentes. Muestre que se necesitan n colores para colorear el grafo completo K_n. *[3 puntos]*

(iii) Sea G un dígrafo. El **indegree** de un vértice cualquiera V de G es el número de arcos entrantes en V. El **outdegree** de V es el número de arcos salientes de V.

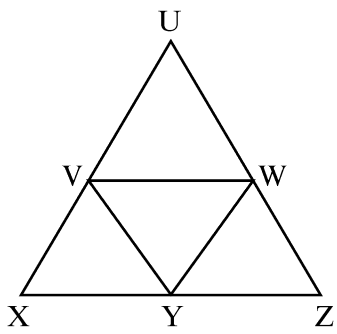
Sea S_1 la suma de los indegrees de todos los vértices de G, S_2 la suma de los outdegrees de todos los vértices, y S_3 el número de arcos de G. Demuestre que $S_1 = S_2 = S_3$. *[2 puntos]*

(iv) (a) Defina el isomorfismo de dos grafos, G y H . *[3 puntos]*

(b) Determine si los dos grafos a continuación son isomórficos. Dé una razón para su respuesta.



Grafo G



Grafo H

[4 puntos]

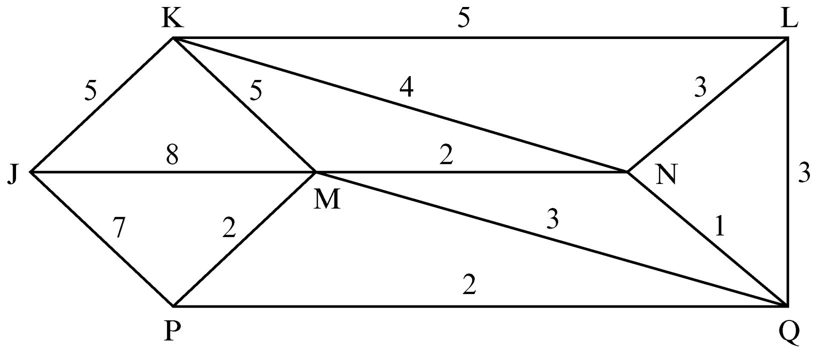
(c) Halle un sendero euleriano para el grafo G comenzando por el vértice B . *[3 puntos]*

(d) Enuncie un resultado que muestre que el grafo H tiene un circuito euleriano . *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8 continuación)

(v) El diagrama siguiente muestra un grafo ponderado.



Utilice los algoritmos de Prim para hallar un árbol generador minimal comenzando por J . Esboce el árbol y halle su ponderación total. *[6 puntos]*

Aproximación y análisis

9. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Use el teorema del valor medio o demuestre de alguna otra manera que para cualquier entero positivo n , $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$. *[3 puntos]*

(b) Muestre que para todo número real s tal que $0 < s < 4$,
$$\frac{1}{s}+\frac{1}{4-s} \geq 1 .$$ *[2 puntos]*

(c) Integrando la desigualdad de la parte (b) en el intervalo $[t,\ 2]$ o de alguna otra manera, muestre que para todo número real t tal que $0 < t \leq 2$,
$$\ln\left(\frac{4-t}{t}\right) \geq 2-t .$$ *[6 puntos]*

(d) A partir de allí, o de alguna otra manera, muestre que para cualquier entero positivo n ,
$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{2n}{2n+1} .$$ *[4 puntos]*

(e) Usando las partes (a) y (d), o de alguna otra manera, muestre que
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e} .$$ *[4 puntos]*

(ii) Sea la función $f(x) = \ln x - 1$. Usando el método de Newton-Raphson y comenzando por $x_1 = 2$, halle una solución aproximada de la ecuación $f(x) = 0$. A partir de allí calcule e con siete cifras decimales. *[5 puntos]*

(iii) Dado que $g : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = x + 2{,}7 - 2{,}7 \ln x$.

(a) Muestre que $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$. *[1 punto]*

(b) A partir de allí y comenzando por $x = 2$ aplique iteración con un punto fijo para calcular e y exprese la respuesta con siete cifras decimales. Justifique su respuesta *[5 puntos]*

Geometría euclídea y secciones cónicas

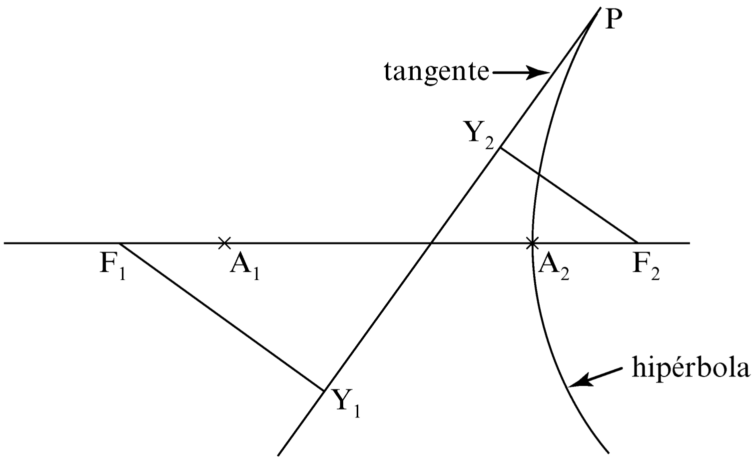
10. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La ecuación de una elipse es $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$.

(a) Halle su centro, sus focos y su excentricidad. *[3 puntos]*

(b) Si $y = mx$ es la ecuación de la recta que es tangente a la elipse dada, halle los valores **exactos** de m . *[6 puntos]*

(ii) Sea una hipérbola de focos F_1 y F_2 y vértices A_1 y A_2 . Sean $[F_1Y_1]$ y $[F_2Y_2]$ las perpendiculares desde los focos a la tangente a la hipérbola en cualquier punto P, como se muestra en la figura siguiente.



(a) Demuestre que Y_1 y Y_2 yacen sobre la circunferencia de diámetro $[A_1A_2]$. *[10 puntos]*

(b) Demuestre que el producto $F_1Y_1 \times F_2Y_2$ es una constante, independientemente de la posición de P. *[6 puntos]*

(iii) En la figura siguiente se muestra un triángulo ABD y una circunferencia de centro O . (BD) es una tangente a la circunferencia en D tal que el triángulo ABD es isósceles. Además $\hat{ADB} = \hat{DBA} = 2\hat{DAB}$. Sea C el punto de intersección de la circunferencia y de la recta (AB) . Demuestre que $AC = DC = DB$. *[5 puntos]*