



**MATEMÁTICAS**  
**NIVEL SUPERIOR**  
**PRUEBA 1**

Viernes 9 de noviembre de 2001 (tarde)

2 horas

Nombre

--

Número

--	--	--	--	--	--	--	--

---

**INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS**

- Escriba su nombre, apellido(s) y número de alumno en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- A menos que se especifique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deben expresarse en forma exacta, o con tres cifras significativas, según sea más apropiado.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la casilla de abajo (p.ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Calculadora

Marca	Modelo

---

EXAMINADOR	LÍDER DE EQUIPO	IBCA
TOTAL /60	TOTAL /60	TOTAL /60

Se otorgará la puntuación máxima a las respuestas correctas. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Donde sea necesario se puede utilizar para sus cálculos el espacio debajo de la casilla. Cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. Una moneda está sesgada de modo que la probabilidad de obtener cara es de  $\frac{2}{3}$ . Se lanza la moneda 1800 veces. Sea  $X$  el número de caras obtenido. Halle:
- (a) la media de  $X$ ;
  - (b) la desviación típica de  $X$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

- (a) \_\_\_\_\_  
(b) \_\_\_\_\_

2. El número complejo  $z$  satisface  $i(z + 2) = 1 - 2z$ , siendo  $i = \sqrt{-1}$ . Escriba  $z$  en la forma  $z = a + bi$ , siendo  $a$  y  $b$  números reales.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

3. El polinomio  $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$  da el mismo resto al dividirlo por  $(x - 2)$  que al dividirlo por  $(x + 1)$ . Halle el valor de  $a$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

4. Considere la serie geométrica infinita siguiente

$$1 + \left(\frac{2x}{3}\right) + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \dots$$

(a) ¿Para qué valores de  $x$  converge la serie?

(b) Halle la suma de la serie si  $x = 1,2$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

5. Tenemos la función  $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$ . Halle la función inversa,  $f^{-1}$ , estableciendo claramente su dominio.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

6. Si  $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & y \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ , halle los valores de  $x$  y de  $y$ , dado que  $AB = BA$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

7. La recta  $y = 16x - 9$  es tangente a la curva  $y = 2x^3 + ax^2 + bx - 9$  en el punto  $(1, 7)$ .

Halle los valores de  $a$  y de  $b$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

8. Una variable aleatoria continua  $X$  tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1+x^2)}, & \text{para } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Halle  $E(X)$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

9. La matriz  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -k & -13 \\ -3 & 5 & k \end{pmatrix}$  es singular. Halle los valores de  $k$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

10. Considere la función  $y = \tan x - 8 \operatorname{sen} x$ .

(a) Halle  $\frac{dy}{dx}$ .

(b) Halle el valor de  $\cos x$  para el que  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

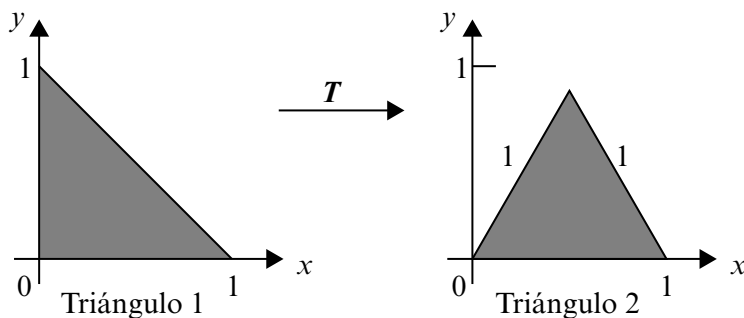


11. Halle los valores de  $x$  para los que  $|5 - 3x| \leq |x + 1|$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

12. Una transformación lineal  $T$  aplica el triángulo 1 en el triángulo 2, tal como muestra la figura.



Halle una matriz que representa  $T$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

13. Considere la tangente a la curva  $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$ .

(a) Halle la ecuación de esta tangente en el punto de abscisa  $x = -1$ .

(b) Halle las coordenadas del punto en el que esta tangente corta la curva de nuevo.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

14. Un punto  $P(x, x^2)$  pertenece a la curva  $y = x^2$ . Calcule la distancia mínima desde el punto  $A\left(2, -\frac{1}{2}\right)$  al punto P.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

15. El punto  $A(3, 0, -2)$  pertenece a la recta  $r = 3i - 2k + \lambda(2i - 2j + k)$ , siendo  $\lambda$  un parámetro real. Halle las coordenadas de **un** punto que se halle a 6 unidades de  $A$ , y sobre esta recta.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

16. Sea  $\theta$  el ángulo que forman los vectores unitarios  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , siendo  $0 < \theta < \pi$ . Exprese  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$  en función de  $\sin \frac{1}{2}\theta$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

17. ¿Cuántos números de cuatro cifras existen que contengan al menos una cifra 3 ?

*Operaciones:*

*Respuesta:*

18. La probabilidad de que un hombre se deje el paraguas en alguna tienda que visita es de  $\frac{1}{3}$ . Después de visitar dos tiendas sucesivamente, se encuentra con que se ha dejado el paraguas en una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya dejado el paraguas en la segunda tienda?

*Operaciones:*

*Respuesta:*

19. Una muestra de material radioactivo se degrada a un ritmo proporcional a la cantidad de materia presente en la muestra. Halle la vida media del material si 50 gramos se degradan hasta llegar a 48 gramos en 10 años.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

20. Halle el área encerrada por las curvas  $y = \frac{2}{1+x^2}$  e  $y = e^{\frac{x}{3}}$ , dado que  $-3 \leq x \leq 3$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*