

© International Baccalaureate Organization 2022

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2022

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2022

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

## Nivel Superior

### Prueba 3

Martes 8 de noviembre de 2022 (tarde)

1 hora

---

#### Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Página en blanco

Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 29]

**En esta pregunta explorará posibles maneras de utilizar resultados deportivos pasados para hacer predicciones sobre futuros encuentros deportivos.**

Peter y Helen son dos amigos que están discutiendo distintas formas de predecir el resultado de los partidos de fútbol internacionales que juega Argentina.

Peter sugiere analizar los datos históricos para que eso les ayude a hacer predicciones. Así, hace una lista con los resultados de los últimos 240 partidos que ha jugado Argentina, en orden cronológico; luego agrupa los partidos en bloques de cuatro. En cada bloque, cuenta cuántas veces ha ganado Argentina. La siguiente tabla muestra los resultados correspondientes a los 60 bloques de cuatro partidos.

Número de victorias de Argentina (por bloque de cuatro partidos)	Frecuencia
0	0
1	11
2	21
3	21
4	7

(a) Determine el número medio de victorias de Argentina por bloque de cuatro partidos. [2]

Peter cree que estos datos se pueden modelizar mediante una distribución binomial con  $n = 4$  y decide llevar a cabo una prueba  $\chi^2$  para determinar la bondad del ajuste.

(b) Utilice los datos de Peter para escribir una estimación de la probabilidad  $p$  para este modelo binomial. [1]

(c) (i) Utilice este modelo binomial para hallar la probabilidad de que Argentina gane cero partidos en un bloque de cuatro partidos. [1]

(ii) Halle la frecuencia esperada correspondiente a cero victorias. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Dado que algunas frecuencias esperadas son menores que 5, Peter combina algunas filas de su tabla para obtener las siguientes frecuencias observadas. A continuación, utiliza su modelo binomial para hallar las frecuencias esperadas correspondientes, redondeando a una cifra decimal.

Número de victorias de Argentina (por bloque de cuatro partidos)	Frecuencia observada	Frecuencia esperada
0 o 1	11	10,8
2	21	20,7
3	21	20,7
4	7	7,8

- (d) Peter utiliza esta tabla para llevar a cabo una prueba  $\chi^2$  de determinación de la bondad del ajuste (a un nivel de significación del 5%) con la que poner a prueba la hipótesis de que los datos siguen una distribución binomial con  $n = 4$ .

Para esta prueba, indique:

- (i) La hipótesis nula [1]
  - (ii) El número de grados de libertad [1]
  - (iii) El valor del parámetro  $p$  [2]
  - (iv) La conclusión de la prueba, justificando su respuesta [2]
- (e) Utilizando el modelo binomial de Peter, halle la probabilidad de que Argentina gane al menos uno de los próximos cuatro partidos de fútbol internacionales que juegue. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Helen cree que se podría hacer una mejor predicción considerando la transición entre partidos. Para simplificar el modelo, decide utilizar solo dos estados: Argentina ganó (A) o Argentina no ganó (B). Helen analiza la lista de resultados de Peter y cuenta el número de veces que:

- Argentina ganó dos veces seguidas (AA),
- Argentina ganó y luego no ganó (AB),
- Argentina no ganó y luego ganó (BA),
- Argentina no ganó dos veces seguidas (BB).

Así, obtuvo los siguientes resultados:

Transición	Frecuencia
AA	85
AB	60
BA	62
BB	32

Helen utiliza las frecuencias relativas para estimar las probabilidades de una matriz de transición.

- (f) (i) Sabiendo que Argentina ganó el partido anterior, muestre que la probabilidad de que Argentina gane el siguiente partido —según la estimación de Helen— es igual a  $\frac{17}{29}$ . [2]
- (ii) Escriba la matriz de transición ( $T$ ) para el modelo de Helen. [2]
- (g) (i) Muestre que el polinomio característico de  $T$  es  $1363\lambda^2 - 1263\lambda - 100 = 0$ . [3]
- (ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle los valores propios de  $T$ . [1]
- (iii) Halle los correspondientes vectores propios. [3]
- (h) Cuando se jubile, dentro de muchos años, Helen tiene pensado viajar a tres partidos de fútbol internacionales consecutivos en los que juegue Argentina. Utilice el modelo de Helen para hallar la probabilidad de que Argentina gane los tres partidos. [4]

2. [Puntuación máxima: 26]

**Algunas enfermedades requieren que los pacientes tomen medicación de manera regular y durante períodos prolongados. En esta pregunta explorará la concentración de un fármaco en el organismo cuando dicho fármaco se administra repetidamente.**

Una vez que un fármaco entra en el organismo, es absorbido y llega a la sangre. A medida que el organismo va descomponiendo el fármaco a lo largo del tiempo, la concentración del fármaco va disminuyendo. Sea  $C(t)$  (medido en miligramos por mililitro,  $\text{mg ml}^{-1}$ ) la concentración del fármaco  $t$  horas después de que se lo hayan administrado al paciente. Se puede suponer que la velocidad a la que se descompone el fármaco es directamente proporcional a su concentración, lo que conduce a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dC}{dt} = -kC, \text{ donde } k \in \mathbb{R}^+.$$

La concentración inicial es igual a  $d \text{ mg ml}^{-1}$ ,  $d > 0$ .

- (a) Resolviendo la ecuación diferencial, muestre que  $C = de^{-kt}$ . [3]

En los apartados restantes de esta pregunta, estudiará un fármaco concreto para el que se sabe que  $k = 0,2$ . La primera dosis se administra en el instante  $t = 0$  y se supone que, antes de este momento, no había nada de fármaco en la sangre.

- (b) Halle el tiempo transcurrido (en horas) hasta que la concentración de este fármaco llega al 5% de su concentración inicial. [2]

El fármaco se debe administrar cada  $T$  horas y a dosis constantes, de modo tal que la concentración del fármaco aumente en una cantidad igual a  $d \text{ mg ml}^{-1}$ . Para simplificar el modelo, se supone que, cada vez que se administra el fármaco, la concentración del fármaco en la sangre aumenta de forma instantánea.

- (c) Muestre que la concentración del fármaco inmediatamente después de haber administrado la tercera dosis es igual a  $d(1 + e^{-0,2T} + e^{-0,4T})$ . [4]

Inmediatamente después de haber administrado la  $n$ -ésima dosis, la concentración del fármaco es igual a:

$$d(1 + e^{-0,2T} + e^{-0,4T} + \dots + e^{-0,2(n-1)T}).$$

- (d) Muestre que esta concentración se puede expresar como  $d\left(\frac{1 - e^{-0,2nT}}{1 - e^{-0,2T}}\right)$ . [2]

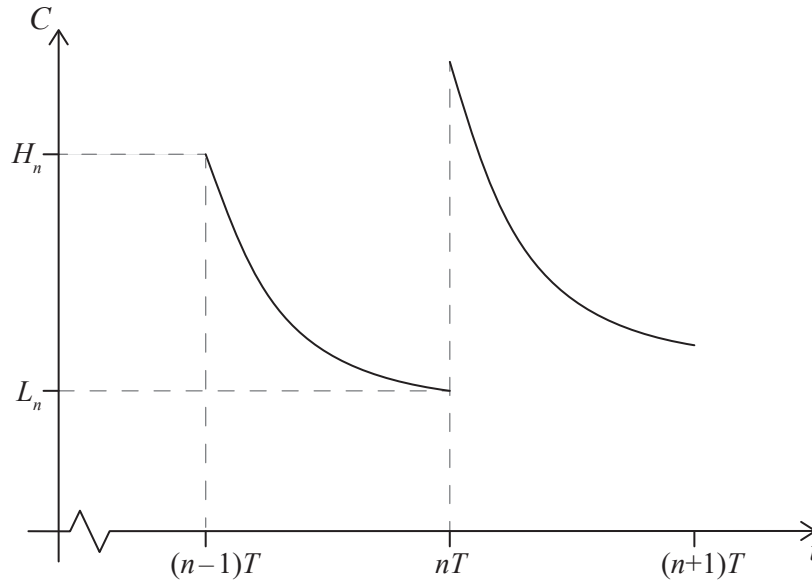
**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

Cuando un paciente lleva ya mucho tiempo tomando este fármaco, es necesario mantener la concentración dentro de un rango determinado para que el fármaco siga siendo seguro y eficaz.

Sea  $H_n$  la concentración más alta de fármaco que hay en el organismo durante el intervalo  $(n - 1)T \leq t < nT$ .

Sea  $L_n$  la concentración más baja de fármaco que hay en el organismo durante el intervalo  $(n - 1)T \leq t < nT$ . Esta información se muestra en el siguiente gráfico.



$H_\infty$  se define como  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n$  y  $L_\infty$  se define como  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ .

(e) Halle, en función de  $d$  y  $T$ , una expresión para:

(i)  $H_\infty$  [2]

(ii)  $L_\infty$  [3]

(f) Muestre que:

(i)  $H_\infty - L_\infty = d$  [2]

(ii)  $5 \ln \left( \frac{H_\infty}{L_\infty} \right) = T$  [3]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**



**(Pregunta 2: continuación)**

Se sabe que este fármaco deja de ser eficaz si la concentración a largo plazo es menor que  $0,06 \text{ mg ml}^{-1}$  y que es seguro si nunca supera los  $0,28 \text{ mg ml}^{-1}$ .

- (g) A partir de lo anterior, para este fármaco, halle un valor adecuado de:
- (i)  $d$  [1]
  - (ii)  $T$  [1]
- (h) Para los valores de  $d$  y  $T$  que ha obtenido en el apartado (g), halle el porcentaje de tiempo durante el que la concentración del fármaco es de al menos  $0,06 \text{ mg ml}^{-1}$  entre la primera y la segunda dosis. [2]
- (i) Sugiera un motivo por el cual las instrucciones del prospecto del fármaco podrían indicar un valor de  $T$  distinto del que ha hallado en el subapartado (g)(ii). [1]
- 

**Referencias:**