Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Medio
Prueba 1

Lunes 31 de octubre de 2022 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

8822 – 7224

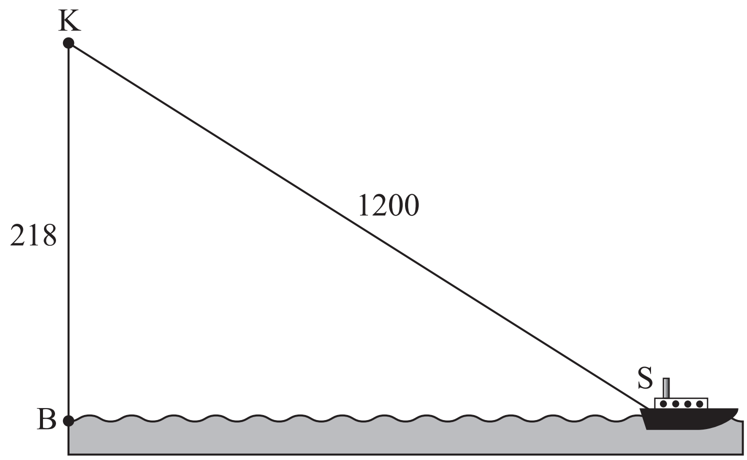
Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 6]

Kacheena está de pie en el punto K, que es la parte superior de un acantilado vertical de $218\,\mathrm{m}$ de altura. La base del acantilado se encuentra en el punto B. Hay un barco situado en el punto S, a $1200\,\mathrm{m}$ de Kacheena.

Toda esta información se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle el ángulo de elevación con el que se ve a Kacheena desde el barco. [2]

(b) Halle la distancia horizontal que hay desde la base del acantilado hasta el barco. [2]

(c) Escriba la respuesta que ha dado en el apartado (b) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

2. [Puntuación máxima: 7]

Durante el primer mes de un programa de reforestación, la ciudad de Neerim planta 85 árboles. A partir de ahí, cada mes se plantarán 30 árboles más que el mes anterior.

En la siguiente tabla se muestra el número de árboles que se plantarán en cada uno de los tres primeros meses.

Mes	**Árboles plantados**
1	85
2	115
3	145

(a) Halle el número de árboles que se plantarán el 15.º mes. [3]

(b) Halle el número total de árboles que se plantarán durante los 15 primeros meses. [2]

(c) Halle el número medio de árboles que se plantarán al mes durante los 15 primeros meses. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

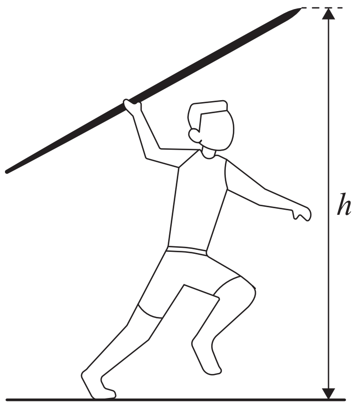
. . . .

. . . .

. . . .

3. [Puntuación máxima: 5]

DeVaughn lanza la jabalina en una competición escolar de atletismo.



La altura sobre el nivel del suelo (h metros) a la que está la punta delantera de la jabalina se puede modelizar mediante la siguiente función cuadrática:

$$h(t) = -3{,}6t^2 + 10{,}8t + 1{,}8\,,\ t \geq 0$$

donde t es el tiempo (en segundos) que ha trascurrido desde que se lanzó la jabalina.

(a) Escriba la altura a la que está la punta delantera de la jabalina en el instante en el que se lanza la jabalina. [1]

(b) Halle cuál es el valor de t cuando la punta delantera de la jabalina alcanza la altura máxima. [2]

(c) Halle cuál es el valor de t cuando la punta delantera de la jabalina toca el suelo. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. [Puntuación máxima: 5]

Sergio quiere averiguar si la fruta del bosque que un adulto prefiere tomar en el desayuno depende de su nivel de ingresos. Para ello obtiene los siguientes datos, correspondientes a 341 adultos, y decide realizar una prueba χ^2 a un nivel de significación del 10% para determinar si hay independencia.

		Nivel de ingresos		
		Bajo	**Medio**	**Alto**
Fruta del bosque preferida	**Fresa**	21	39	30
	Arándano	39	67	42
	Otra fruta del bosque	32	45	26

(a) Escriba la hipótesis nula. [1]

(b) Halle el valor del estadístico χ^2. [2]

Para esta prueba χ^2, el valor crítico es $7{,}78$.

(c) Escriba la conclusión a la que llega Sergio con esta prueba, en el contexto de la pregunta. Justifique su respuesta. [2]

5. [Puntuación máxima: 6]

Celeste calentó una taza de café y luego dejó que se enfriase hasta que alcanzó la temperatura ambiente. Celeste averiguó que la temperatura del café (T, medida en $^\circ\mathrm{C}$) se podía modelizar mediante la siguiente función:

$$T(t) = 71\,\mathrm{e}^{-0{,}0514t} + 23\,,\ t \geq 0\,,$$

donde t es el tiempo (en minutos) transcurrido desde que el café empezó a enfriarse.

(a) Halle la temperatura del café transcurridos 16 minutos desde que empezó a enfriarse. [2]

El gráfico de T tiene una asíntota horizontal.

(b) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal. [1]

(c) Escriba la temperatura ambiente. [1]

(d) Sabiendo que $T^{-1}(50) = k$, halle el valor de k. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Puntuación máxima: 5]

Manny y Annabelle, dos profesores de matemáticas del Instituto Burnham, ponen a sus alumnos el mismo examen. En cada una de sus clases, se obtiene una muestra aleatoria de las notas del examen.

Notas del examen en la clase de Manny	76	77	82	84	88	90	91	98
Notas del examen en la clase de Annabelle	68	79	81	89	91	92	92	95

Annabelle utiliza estas notas para llevar a cabo una prueba t de Student de dos colas con la que comparar las medias de las dos clases, a un nivel de significación del 5%. Se supone que, en las dos clases, las notas de los exámenes siguen una distribución normal y tienen la misma varianza.

La hipótesis nula es $\mu_1 = \mu_2$, donde μ_1 es la nota media del examen en la clase de Manny y μ_2 es la nota media del examen en la clase de Annabelle.

(a) Escriba la hipótesis alternativa. [1]

(b) Halle el valor del parámetro p correspondiente a esta prueba. Dé la respuesta redondeando a cinco cifras decimales. [2]

Annabelle concluye que no hay indicios suficientes para rechazar la hipótesis nula.

(c) Indique si la conclusión de Annabelle es correcta. Dé una razón que justifique su respuesta. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Puntuación máxima: 7]

El 1 de diciembre de 2022, Laviola invierte 800 euros (EUR) en una cuenta de ahorro que ofrece un tipo de interés nominal anual del $7{,}5\,\%$ compuesto mensualmente. Al final de cada mes, Laviola ingresa en esa cuenta de ahorro $\text{EUR } 500$ adicionales.

Cuando hayan transcurrido k meses completos, Laviola tendrá ahorrado suficiente dinero como para sacar $\text{EUR } 10\,000$ de la cuenta.

(a) Halle el valor más pequeño posible de k, con $k \in \mathbb{Z}^+$. [4]

(b) Para este valor de k, halle los intereses que habrá percibido Laviola en la cuenta de ahorro. Dé la respuesta redondeando al número entero de EUR más próximo. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

8. [Puntuación máxima: 5]

Roy es miembro de un club de automovilismo y con frecuencia conduce por el circuito de Port Campbell.

Los tiempos que tarda en completar una vuelta al circuito siguen una distribución normal de media 59 segundos y desviación típica igual a 3 segundos.

(a) Halle la probabilidad de que Roy complete una vuelta en menos de 55 segundos. [2]

Roy va a participar en una carrera de 20 vueltas. Se espera que en $8{,}6$ de esas vueltas tarde más de t segundos.

(b) Halle el valor de t. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Puntuación máxima: 7]

Taizo juega a un juego en el que lanza una pelota para tratar de derribar dos botellas que hay encima de una mesa. La probabilidad de que derribe alguna botella en una partida dada se muestra en la siguiente tabla.

Número de botellas derribadas	0	1	2
Probabilidad	$0{,}5$	$0{,}4$	$0{,}1$

(a) Taizo juega dos partidas, que son independientes la una de la otra. Halle la probabilidad de que Taizo derribe **en total** dos botellas. [4]

En una partida dada, Taizo ganará k puntos si derriba dos botellas, ganará 4 puntos si derriba una botella y perderá 8 puntos si no derriba ninguna botella.

(b) Halle el valor de k para el cual el juego es justo. [3]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. [Puntuación máxima: 6]

Las estrellas se clasifican según su brillo. Las estrellas más brillantes del cielo tienen una magnitud de 1 o menos. La magnitud (m) de otra estrella se puede modelizar en función de su brillo (b) relativo al de una estrella de magnitud 1, como muestra la siguiente ecuación:

$$m = 1 - 2{,}5\log_{10}(b)$$

Hay una estrella llamada Acubens que tiene un brillo de $0{,}0525$.

(a) Halle la magnitud de Acubens. [2]

Ceres tiene una magnitud de 7 y es la estrella menos brillante que es visible sin telescopio.

(b) Halle el brillo de Ceres. [2]

(c) Halle cuántas veces más brillante que Ceres es Acubens. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

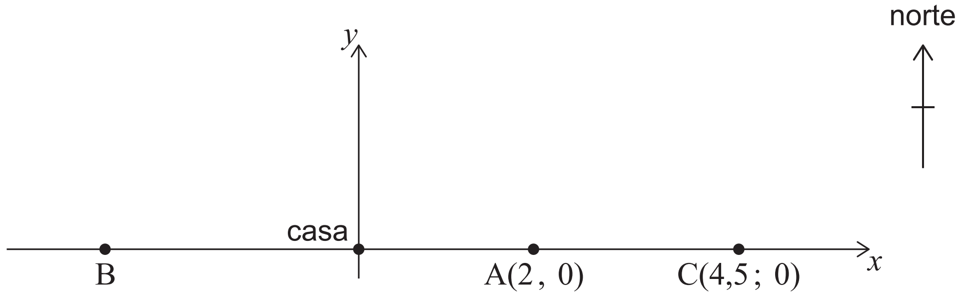
11. [Puntuación máxima: 7]

La casa de Kristi está situada en una carretera recta y larga que tiene dirección este-oeste. La carretera se puede modelizar mediante la ecuación $y = 0$; la casa se encuentra en el origen $(0,\ 0)$.

Kristi está entrenando para un maratón; para ello, corre desde su casa hasta un punto de la carretera y luego vuelve a casa en autobús.

- El primer día, Kristi corre 2 kilómetros hacia el este, hasta el punto $\mathrm{A}(2,\ 0)$.
- El segundo día, Kristi corre hacia el oeste, hasta el punto B.
- El tercer día, Kristi corre $4{,}5$ kilómetros hacia el este, hasta el punto $\mathrm{C}(4{,}5;\ 0)$.

Toda esta información aparece representada en la siguiente figura.



Kristi va aumentando cada día la distancia que corre. El punto al que llega cada día se puede representar mediante una coordenada x. Estas coordenadas x forman una progresión geométrica.

(a) Muestre que la razón común (r) es igual a $-1{,}5$. [2]

El $6.^{\text{o}}$ día, Kristi corre hasta el punto F.

(b) Halle la ubicación del punto F. [2]

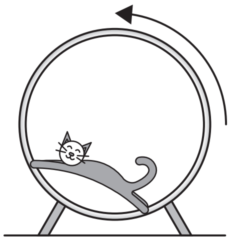
(c) Halle la distancia total que ha corrido Kristi durante los 7 primeros días de entrenamiento. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 11: continuación)

12. [Puntuación máxima: 6]

Un gato corre por dentro de una rueda circular, haciendo que la rueda gire a velocidad constante en sentido contrario a las agujas del reloj. La altura (h cm) a la que se encuentra un punto fijo (P) de la rueda se puede modelizar mediante la ecuación $h(t) = a\,\mathrm{sen}(bt) + c$, donde t es el tiempo en segundos y $a, b, c \in \mathbb{R}^{+}$.



En el instante $t = 0$, el punto P se encuentra a una altura de $78\,\mathrm{cm}$.

(a) Escriba el valor de c. [1]

En el instante $t = 4$, el punto P alcanza por primera vez su altura máxima, igual a $143\,\mathrm{cm}$.

(b) Halle el valor de:

(i) a

(ii) b [3]

(c) Escriba la altura mínima del punto P. [1]

Un rato después, el gato ya está cansado, con lo que el punto P gira a una nueva velocidad constante y tarda el doble en dar una vuelta completa.

(d) Escriba el nuevo valor de b. [1]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

13. [Puntuación máxima: 8]

Giles alquila su barco y cobra a los clientes por hora de uso. Se sabe que

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 20 - \frac{980}{t^2},\ 0 < t \leq 12$$

donde P es el precio por hora (en coronas noruegas, NOK) que le cobra al cliente y t es el tiempo (en horas) que el cliente utiliza el barco.

El precio por hora alcanza un mínimo local cuando el barco se alquila durante h horas.

(a) Halle el valor de h. [2]

Sandra alquiló el barco de Giles durante 5 horas y le cobraron $\mathrm{NOK}\ 328$ por hora. Yvonne alquila el barco de Giles durante 7 horas.

(b) Muestre que el precio por hora que le cobrarán a Yvonne es de $\mathrm{NOK}\ 312$. [6]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Referencias:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.