Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 1

Lunes 31 de octubre de 2022 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

8822 – 7221

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 5]

Sergio quiere averiguar si la fruta del bosque que un adulto prefiere tomar en el desayuno depende de su nivel de ingresos. Para ello obtiene los siguientes datos, correspondientes a 341 adultos, y decide realizar una prueba χ^2 a un nivel de significación del 10% para determinar si hay independencia.

		Nivel de ingresos		
		Bajo	**Medio**	**Alto**
Fruta del bosque preferida	**Fresa**	21	39	30
	Arándano	39	67	42
	Otra fruta del bosque	32	45	26

(a) Escriba la hipótesis nula. [1]

(b) Halle el valor del estadístico χ^2. [2]

Para esta prueba χ^2, el valor crítico es $7{,}78$.

(c) Escriba la conclusión a la que llega Sergio con esta prueba, en el contexto de la pregunta. Justifique su respuesta. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Puntuación máxima: 5]

Celeste calentó una taza de café y luego dejó que se enfriase hasta que alcanzó la temperatura ambiente. Celeste averiguó que la temperatura del café (T, medida en $^{\circ}\mathrm{C}$) se podía modelizar mediante la siguiente función:

$$T(t) = 71\,\mathrm{e}^{-0{,}0514t} + 23\,,\ t \geq 0\,,$$

donde t es el tiempo (en minutos) transcurrido desde que el café empezó a enfriarse.

(a) Halle la temperatura del café transcurridos 16 minutos desde que empezó a enfriarse. [2]

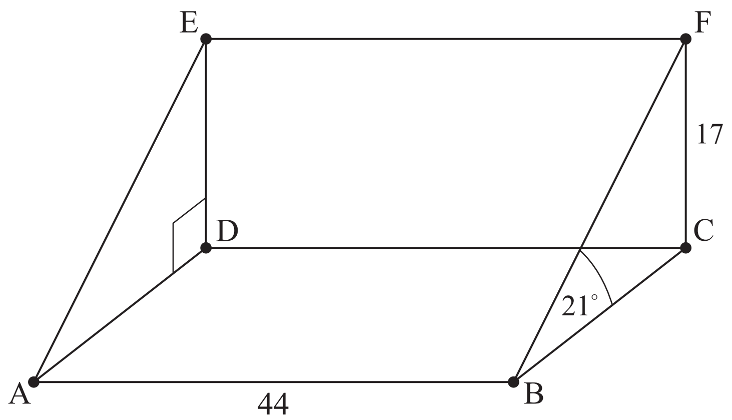
(b) Escriba la temperatura ambiente. [1]

(c) Sabiendo que $T^{-1}(50) = k$, halle el valor de k. [2]

3. [Puntuación máxima: 5]

Una pista de esquí artificial se puede modelizar como un prisma triangular, tal y como se muestra en la figura. El rectángulo ABCD es horizontal y el rectángulo CDEF es vertical.

la figura no está dibujada a escala



La altura máxima de la pista de esquí (CF) es igual a 17 metros y el ángulo de máxima pendiente de la pista de esquí $(\mathrm{F\hat{B}C})$ es igual a 21°.

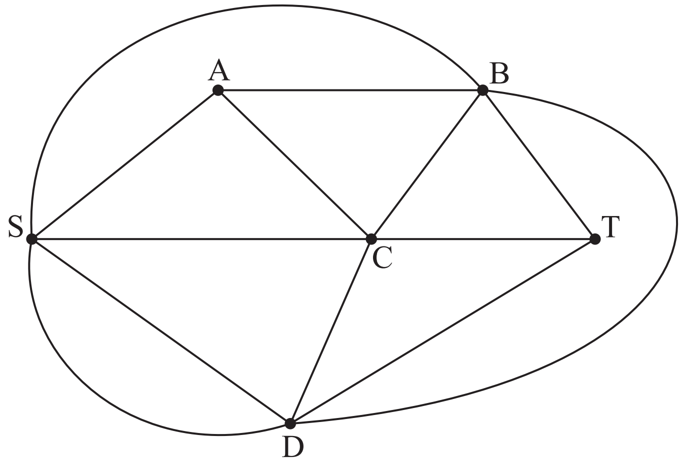
(a) Calcule la longitud de $[\mathrm{BF}]$. [2]

La anchura de la base de la pista de esquí (AB) es igual a 44 metros. Mayumi esquía en línea recta, empezando en el punto E y acabando en la base de la pista de esquí.

(b) Halle el valor del ángulo de mínima pendiente con el que puede esquiar Mayumi. [3]

4. [Puntuación máxima: 7].

En una competición, los participantes se tienen que mover por un laberinto para encontrar un tesoro. A continuación se muestra el laberinto en forma de grafo, donde cada arista representa un pasillo del laberinto. Los participantes empiezan en S y el tesoro está situado en T.



(a) Complete la matriz de adyacencia ($\boldsymbol{M}$) correspondiente a este grafo. [2]

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} S & A & B & C & D & T \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \boxed{} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \boxed{} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{} & \boxed{} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Las reglas de la competición indican que cada participante puede recorrer un máximo de cuatro pasillos.

(b) Halle el número de recorridos con un máximo de 4 aristas que hay entre S y T. [4]

(c) Explique por qué el número de maneras que tiene un participante de llegar hasta el tesoro es menor que la respuesta dada en el apartado (b). [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 4: continuación)

5. [Puntuación máxima: 7]

Taizo juega a un juego en el que lanza una pelota para tratar de derribar dos botellas que hay encima de una mesa. La probabilidad de que derribe alguna botella en una partida dada se muestra en la siguiente tabla.

Número de botellas derribadas	0	1	2
Probabilidad	$0,5$	$0,4$	$0,1$

(a) Taizo juega dos partidas, que son independientes la una de la otra. Halle la probabilidad de que Taizo derribe **en total** dos botellas. [4]

En una partida dada, Taizo ganará k puntos si derriba dos botellas, ganará 4 puntos si derriba una botella y perderá 8 puntos si no derriba ninguna botella.

(b) Halle el valor de k para el cual el juego es justo. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

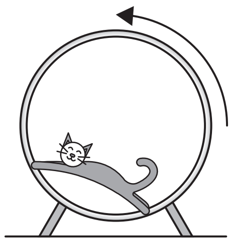
. . . .

. . . .

. . . .

6. [Puntuación máxima: 6]

Un gato corre por dentro de una rueda circular, haciendo que la rueda gire a velocidad constante en sentido contrario a las agujas del reloj. La altura ($h\,\mathrm{cm}$) a la que se encuentra un punto fijo (P) de la rueda se puede modelizar mediante la ecuación $h(t) = a\,\mathrm{sen}(bt) + c$, donde t es el tiempo en segundos y a, b, $c \in \mathbb{R}^{+}$.



En el instante $t = 0$, el punto P se encuentra a una altura de $78\,\mathrm{cm}$.

(a) Escriba el valor de c. [1]

En el instante $t = 4$, el punto P alcanza por primera vez su altura máxima, igual a $143\,\mathrm{cm}$.

(b) Halle el valor de:

(i) a

(ii) b [3]

(c) Escriba la altura mínima del punto P. [1]

Un rato después, el gato ya está cansado, con lo que el punto P gira a una nueva velocidad constante y tarda el doble en dar una vuelta completa.

(d) Escriba el nuevo valor de b. [1]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Puntuación máxima: 7]

El 1 de diciembre de 2022, Laviola invierte 800 euros (EUR) en una cuenta de ahorro que ofrece un tipo de interés nominal anual del $7{,}5\,\%$ compuesto mensualmente. Al final de cada mes, Laviola ingresa en esa cuenta de ahorro $\mathrm{EUR}\ 500$ adicionales.

Cuando hayan transcurrido k meses completos, Laviola tendrá ahorrado suficiente dinero como para sacar $\mathrm{EUR}\ 10\,000$ de la cuenta.

(a) Halle el valor más pequeño posible de k, con $k \in \mathbb{Z}^+$. [4]

(b) Para este valor de k, halle los intereses que habrá percibido Laviola en la cuenta de ahorro. Dé la respuesta redondeando al número entero de EUR más próximo. [3]

8. [Puntuación máxima: 7]

La recta L_1 viene dada por la ecuación vectorial $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3p+4 \\ 2p-1 \\ p+9 \end{pmatrix}$, donde $p \in \mathbb{R}$.

La recta L_2 viene dada por la ecuación vectorial $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} q-2 \\ 1-q \\ 2q+1 \end{pmatrix}$, donde $q \in \mathbb{R}$.

Estas dos rectas se cortan en el punto M.

(a) Halle las coordenadas de M. [3]

(b) Halle el ángulo agudo que forman las dos rectas. [4]

9. [Puntuación máxima: 8]

La transformación T está representada por la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Un pentágono que tiene un área de $12\,\text{cm}^2$ se transforma mediante T.

(a) Halle el área de la imagen de este pentágono. [2]

Al aplicar la transformación T, las coordenadas de la imagen del punto X son $(2t-3,\ 6-5t)$, donde $t \in \mathbb{R}$.

(b) Halle las coordenadas de X en función de t. [6]

10. [Puntuación máxima: 7]

Las estrellas se clasifican según su brillo. Las estrellas más brillantes del cielo tienen una magnitud de 1 o menos. La magnitud (m) de otra estrella se puede modelizar en función de su brillo (b) relativo al de una estrella de magnitud 1, como muestra la siguiente ecuación:

$$m = 1 - 2{,}5 \log_{10}(b)$$

Hay una estrella llamada Acubens que tiene un brillo de $0{,}0525$.

(a) Halle la magnitud de Acubens. [2]

Ceres tiene una magnitud de 7 y es la estrella menos brillante que es visible sin telescopio.

(b) Halle el brillo de Ceres. [2]

La estrella Próxima Centauri tiene una magnitud mayor que el planeta Neptuno. La diferencia entre sus magnitudes es igual a $3{,}2$.

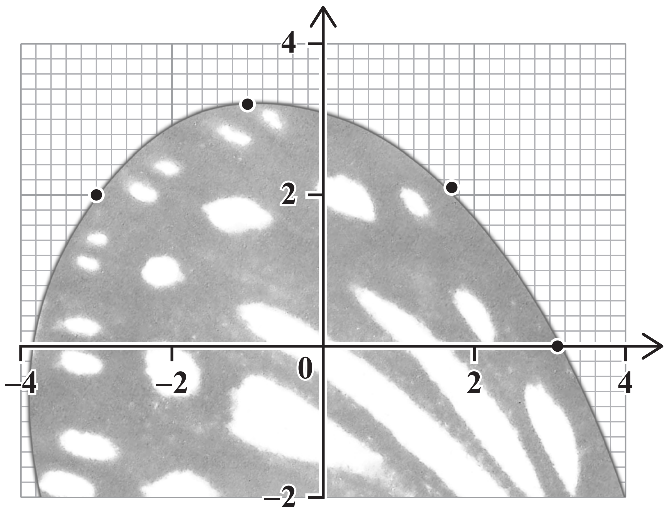
(c) Halle cuántas veces más brillante que Próxima Centauri es Neptuno. [3]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

11. [Puntuación máxima: 5]

Gloria quiere modelizar el borde curvo del ala de una mariposa. Para ello, introduce una foto del ala en su programa de representación gráfica y halla las coordenadas de cuatro puntos pertenecientes al borde del ala.



x	y
-3	2
-1	$3,2$
$1,7$	$2,1$
$3,1$	0

Gloria cree que una curva cúbica es un buen modelo para representar el borde del ala de la mariposa.

(a) Halle la ecuación de la curva de regresión cúbica para estos datos. [2]

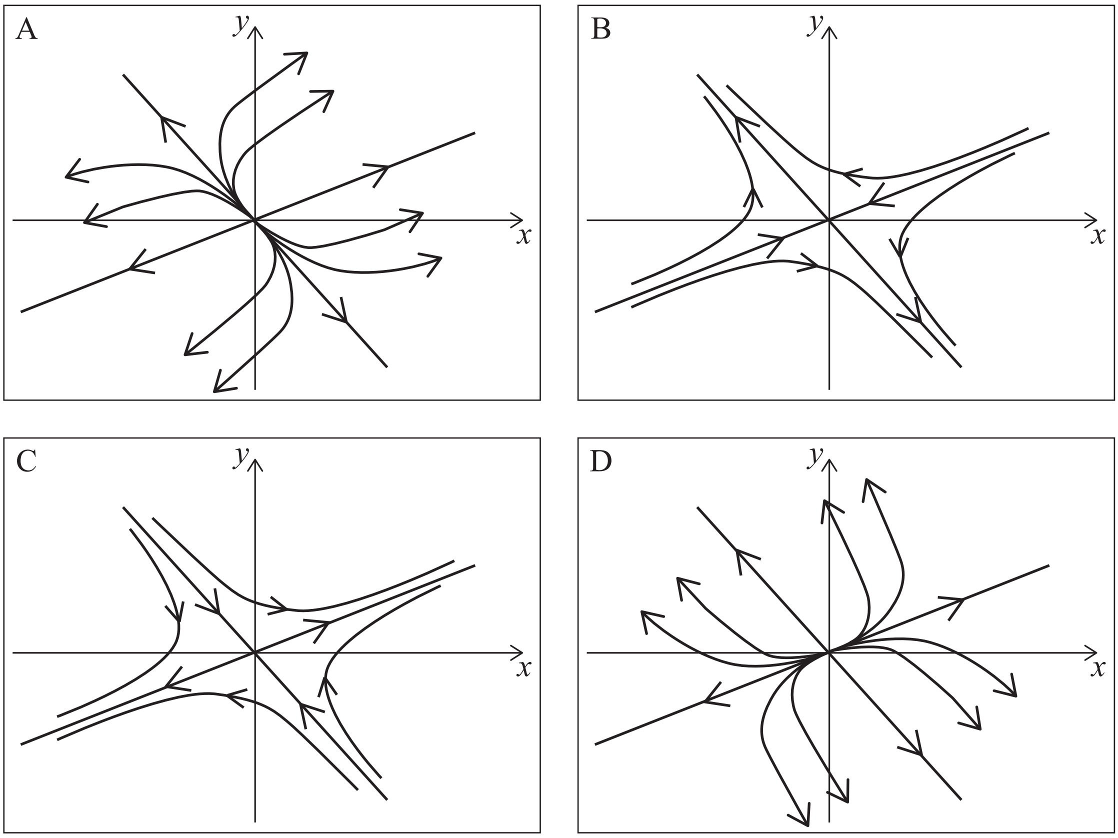
Para la foto de una segunda ala de mariposa, Gloria obtiene que la ecuación de la curva de regresión es $y = 0{,}0083x^3 - 0{,}075x^2 - 0{,}58x + 2{,}2$.

Gloria se da cuenta de que su foto de la segunda mariposa es una ampliación (homotecia) de la mariposa de tamaño real, con factor de escala 2 y centrada en $(0,\ 0)$.

(b) Halle la ecuación de la curva cúbica que modeliza el ala de tamaño real. [3]

12. [Puntuación máxima: 5]

A continuación, se muestran cuatro posibles retratos de fase (rotulados como A, B, C y D) correspondientes a las ecuaciones diferenciales acopladas $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + by$ y $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx + dy$.



Sea la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cuyos valores propios son λ_1 y λ_2.

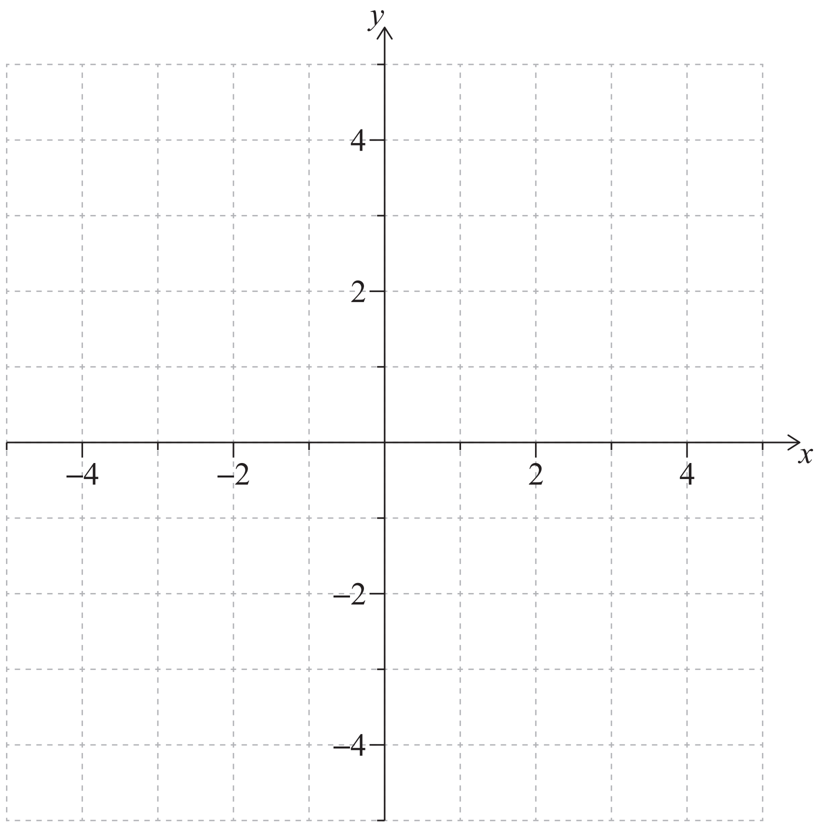
(a) Complete la siguiente tabla, escribiendo la letra del retrato de fase que mejor encaje con la descripción. [3]

Descripción	Retrato de fase
$\lambda_1 = 2$ con vector propio $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\lambda_2 = 3$ con vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	
$\lambda_1 = 2$ con vector propio $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\lambda_2 = -3$ con vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	
$\lambda_1 = -2$ con vector propio $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\lambda_2 = 3$ con vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 12: continuación)

(b) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el retrato de fase correspondiente a $\lambda_1 = -2 + 3\mathrm{i}$ y $\lambda_2 = -2 - 3\mathrm{i}$, sabiendo que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -12$ en $(3, 0)$. [2]



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

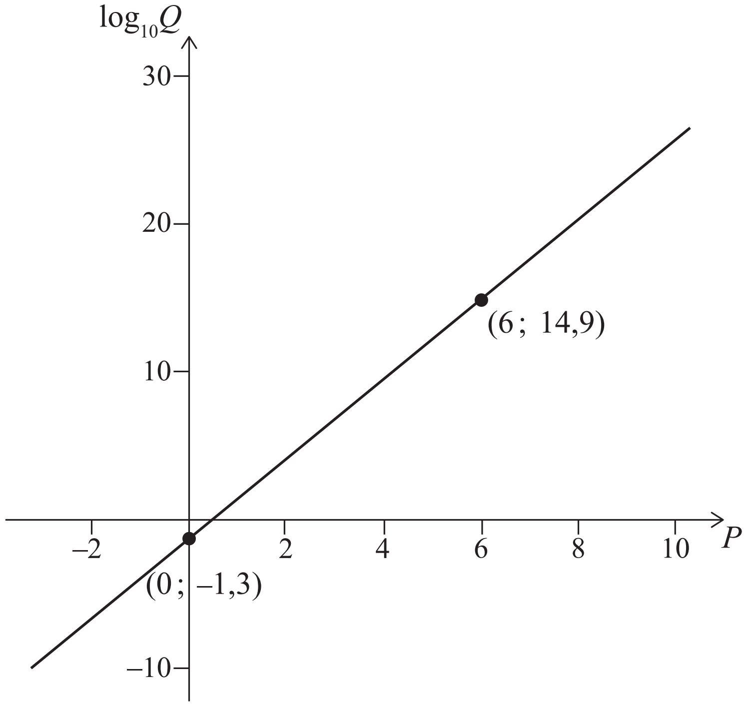
. . . .

. . . .

. . . .

13. [Puntuación máxima: 6]

Gen está investigando la relación que existe entre dos conjuntos de datos que ha obtenido, denominados P y Q. Para ello crea un diagrama de dispersión donde P está representado en el eje x, y $\log_{10} Q$ en el eje y. Gen se da cuenta de que los puntos del diagrama muestran una fuerte correlación lineal, así que dibuja una recta de ajuste óptimo, tal y como se muestra en la figura. La recta pasa por los puntos $(0;\ -1{,}3)$ y $(6;\ 14{,}9)$.



(a) Halle una ecuación que exprese Q en función de P. [3]

Gen también está investigando la relación que existe entre los datos Q del apartado anterior y unos datos nuevos (R). Ella cree que los datos se pueden modelizar mediante la ecuación $Q = a \ln R + b$ y decide crear un diagrama de dispersión para verificar su hipótesis.

(b) Indique qué expresión debería representar Gen en cada eje para verificar su hipótesis. [1]

El diagrama de dispersión muestra una relación lineal, y Gen halla que $a = 4{,}3$ y $b = 12{,}1$.

(c) Halle una ecuación que exprese P en función de R. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 13: continuación)

14. [Puntuación máxima: 9]

Una partícula se mueve de modo tal que su velocidad (v metros por segundo) en el instante t segundos viene dada por $v = t\,\mathrm{sen}(t^2)$.

(a) Halle una expresión para la aceleración de la partícula. [2]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle cuál será la aceleración máxima para $0 \le t \le 8$. [2]

La partícula sale desde el origen.

(c) Halle una expresión para el desplazamiento de la partícula. [3]

(d) A partir de lo anterior, muestre que el desplazamiento de la partícula no tendrá nunca un valor negativo. [2]

15. [Puntuación máxima: 5]

Un circuito eléctrico contiene un condensador. La carga que hay en el condensador (q culombios) en el instante t segundos satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 5\frac{dq}{dt} + 20q = 200 .$$

Inicialmente, $q = 1$ y $\frac{dq}{dt} = 8$.

Utilice el método de Euler, con $h = 0,1$, para estimar cuál será la carga máxima que habrá en el condensador durante el primer segundo.

16. [Puntuación máxima: 8]

La directora de un colegio está preocupada porque solo el 30% de los alumnos eligen opciones saludables en el comedor escolar. Por ello, organiza una campaña para promover una alimentación saludable y realiza una prueba para saber si la campaña ha hecho que aumente el número de alumnos que eligen una opción saludable. La directora supone que lo que elige un alumno es independiente de lo que eligen el resto de alumnos.

(a) Escriba hipótesis adecuadas para esta prueba. [2]

La directora decide tomar una muestra aleatoria compuesta por 80 alumnos. Rechazará la hipótesis nula si hay al menos 31 alumnos que eligen una opción saludable.

(b) Halle la probabilidad de que cometa un error de tipo I. [3]

De hecho, con la campaña se logró que el 40% de los alumnos eligieran una opción saludable.

(c) Halle la probabilidad de que cometa un error de tipo II. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

17. [Puntuación máxima: 8]

La hora a la que amanece en Taipéi (R horas después de la medianoche) se puede modelizar mediante la siguiente ecuación:

$$R = 1{,}08\cos(0{,}0165t + 0{,}413) + 4{,}94\,,$$

donde t es el día del año 2021 (por ejemplo, $t = 2$ representa el 2 de enero de 2021).

La hora a la que anochece en Taipéi (S horas después de la medianoche) se puede modelizar mediante la siguiente ecuación:

$$S = 1{,}15\cos(0{,}0165t - 2{,}97) + 18{,}9\,.$$

El número de horas de luz diarias (D) que hubo en Taipéi durante 2021 se puede modelizar mediante la siguiente ecuación:

$$D = a\cos(0{,}0165t + b) + c\,.$$

(a) Halle el valor de a, de b y de c. [6]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle cuál fue el mayor número de horas de luz diarias que hubo en Taipéi durante 2021 y el día del año en el que sucedió. [2]

Advertencia:

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB.

Referencias:

11. Fleur, 2019. *photo-1560263816-d704d83cce0f.* [imagen en línea]. Disponible en: https://unsplash.com/photos/SE2zTdS1MNo [Consulta: 8 de febrero de 2022]. Material original adaptado.