Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 3

Martes 8 de noviembre de 2022 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

8822 – 7123

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 28]

En esta pregunta tendrá que investigar series de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} i^q = 1^q + 2^q + 3^q + \ldots + n^q \text{, donde } n,\, q \in \mathbb{Z}^+$$

y utilizar diversos métodos para hallar polinomios (en función de n) para dichas series.

En el caso en el que $q = 1$, la serie anterior es aritmética.

(a) Muestre que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$. [1]

Considere ahora el caso en el que $q = 2$.

(b) La siguiente tabla da los valores de n^2 y $\sum_{i=1}^{n} i^2$ para $n = 1, 2, 3$.

n	n^2	$\sum_{i=1}^{n} i^2$
1	1	1
2	4	5
3	9	p

(i) Escriba el valor de p. [1]

(ii) La suma de los n primeros cuadrados se puede expresar como un polinomio cúbico con tres términos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 \text{, donde } a_1,\, a_2,\, a_3 \in \mathbb{Q}^+.$$

A partir de lo anterior, escriba un sistema de tres ecuaciones lineales cuyas incógnitas sean a_1, a_2 y a_3. [3]

(iii) A partir de lo anterior, halle los valores de a_1, a_2 y a_3. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Ahora tendrá que explorar un método que se puede generalizar a todos los valores de q.

Considere la función $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Muestre que $x f'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$. [1]

Sea $f_1(x) = x f'(x)$ y considere la siguiente familia de funciones:

$$f_2(x) = x f_1'(x)$$

$$f_3(x) = x f_2'(x)$$

$$f_4(x) = x f_3'(x)$$

$$\ldots$$

$$f_q(x) = x f_{q-1}'(x)$$

(d) (i) Muestre que $f_2\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} i^2 x^i$. [2]

(ii) Pruebe mediante inducción matemática que $f_q\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} i^q x^i$, $q \in \mathbb{Z}^+$. [6]

(iii) Utilizando la notación de sumatoria, escriba una expresión para $f_q(1)$. [1]

(e) Considerando $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ como una serie geométrica (para $x \neq 1$), muestre que $f(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. [2]

(f) Para $x \neq 1$, muestre que $f_1(x) = \dfrac{nx^{n+2} - \left(n+1\right)x^{n+1} + x}{\left(x-1\right)^2}$. [3]

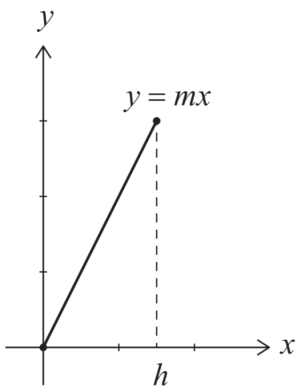
(g) (i) Muestre que $\lim_{x \to 1} f_1(x)$ es una indeterminación. [1]

(ii) A partir de lo anterior, aplicando la regla de L'Hôpital, muestre que $\lim_{x \to 1} f_1(x) = \dfrac{1}{2} n\left(n+1\right)$. [5]

2. [Puntuación máxima: 27]

En esta pregunta tendrá que investigar diversas superficies curvas y utilizar el análisis para derivar algunas fórmulas fundamentales que se emplean en geometría.

Considere una recta que parte del origen, $y = mx$, donde $0 \le x \le h$ y m, h son constantes positivas.



Cuando esta recta se gira $360°$ alrededor del eje x, se forma un cono; el área (A) de la superficie curva del cono viene dada por

$$A = 2\pi\int_0^h y\sqrt{1+m^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

(a) Sabiendo que $m = 2$ y $h = 3$, muestre que $A = 18\sqrt{5}\,\pi$. [2]

(b) Considere ahora el caso general en el que se forma un cono rotando la recta $y = mx$, donde $0 \le x \le h$, $360°$ alrededor del eje x.

(i) Deduzca una expresión que dé el radio de este cono (r) en función de h y m. [1]

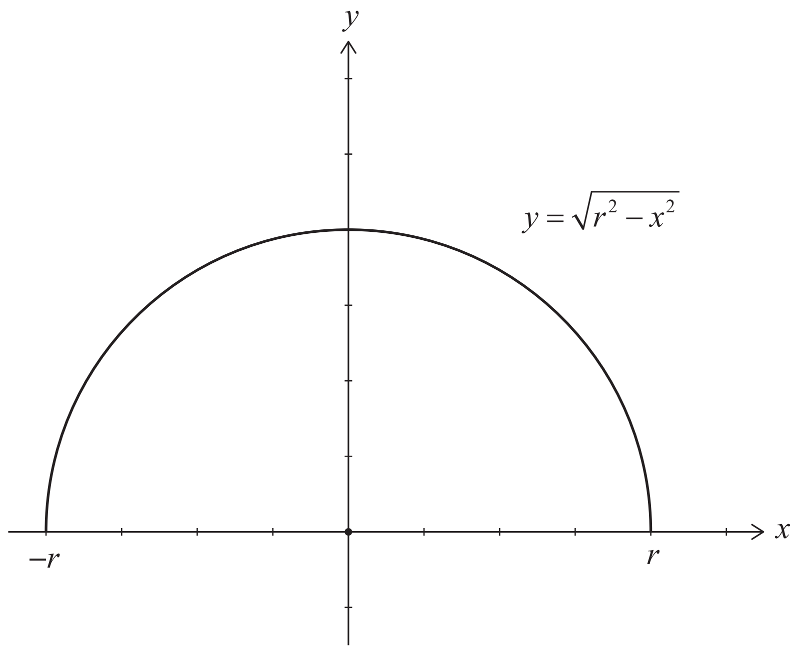
(ii) Deduzca una expresión que dé la generatriz (l) en función de h y m. [2]

(iii) A partir de lo anterior, utilizando la integral que aparece más arriba, muestre que $A = \pi rl$. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Considere el semicírculo de radio r que viene dado por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, donde $-r \le x \le r$.



(c) Halle una expresión para $\frac{dy}{dx}$. [2]

Una curva derivable $y = f(x)$ está definida para $x_1 \le x \le x_2$ e $y \ge 0$. Cuando se rota cualquier curva así $360°$ alrededor del eje x, la superficie que se genera tiene un área (A) que viene dada por

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \, .$$

(d) Se genera una esfera rotando el semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, donde $-r \le x \le r$, $360°$ alrededor del eje x . Muestre mediante integración que el área de la superficie de esta esfera es $4\pi r^2$. [4]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

(e) Sea $f\left(x\right)=\sqrt{r^2-x^2}$, donde $-r \le x \le r$.

El gráfico de $y=f(x)$ se transforma en el gráfico de $y=f(kx)$, $k>0$. Este gráfico forma una curva distinta, denominada semielipse.

(i) Describa esta transformación geométrica. [2]

(ii) Escriba, en función de r y k, las intersecciones con el eje x del gráfico de $y=f(kx)$. [1]

(iii) Para $y=f(kx)$, halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en función de x, r y k. [2]

(iv) La semielipse $y=f(kx)$ se rota $360°$ alrededor del eje x, generando así un sólido denominado elipsoide.

Halle una expresión en función de r y k para el área (A) de la superficie del elipsoide. Dé la respuesta en la forma $2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{p\left(x\right)}\,\mathrm{d}x$, donde $p(x)$ es un polinomio. [4]

(v) El planeta Tierra se puede modelizar como un elipsoide. En este modelo:

- El elipsoide tiene un eje de simetría rotacional que va del Polo Norte al Polo Sur.
- La distancia entre el Polo Norte y el Polo Sur es igual a $12\,714\,\mathrm{km}$.
- El diámetro del ecuador es igual a $12\,756\,\mathrm{km}$.

Eligiendo valores adecuados para r y k, halle el área de la superficie de la Tierra en km^2, redondeando a 4 cifras significativas. Dé la respuesta en la forma $a\times 10^q$, donde $1\le a<10$ y $q\in\mathbb{Z}^+$. [4]

Referencias: