Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 2

Martes 1 de noviembre de 2022 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

8822 – 7122

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

La siguiente tabla muestra las notas de un examen de Matemáticas (x) y las notas de un examen de Ciencias (y) que ha obtenido un grupo de ocho alumnos.

Notas de Matemáticas (x)	64	68	72	75	80	82	85	86
Notas de Ciencias (y)	67	72	77	76	84	83	89	91

Para estos datos, la recta de regresión de y sobre x se puede escribir de la forma $y = ax + b$.

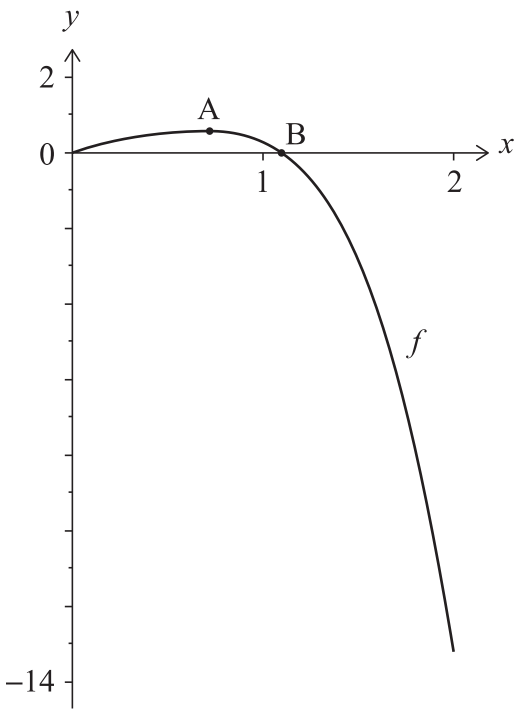
(a) Halle el valor de a y el valor de b. [2]

(b) Escriba el valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r). [1]

(c) Utilice la ecuación de su recta de regresión para predecir la nota que obtendrá en el examen de Ciencias un alumno que haya obtenido una nota de 78 en el examen de Matemáticas. Exprese la respuesta redondeando al número entero más próximo. [2]

2. [Puntuación máxima: 6]

La función f viene dada por $f(x) = \ln(xe^x + 1) - x^4$, para $0 \le x \le 2$. En la siguiente figura se muestra el gráfico de f.



El gráfico de f tiene un máximo local en el punto A, y corta al eje x en el origen y en el punto B.

(a) Halle las coordenadas de A. [2]

(b) Halle la coordenada x de B. [1]

(c) Halle el área total de la región que está delimitada por el gráfico de f, el eje x y la recta $x = 2$. [3]

3. [Puntuación máxima: 5]

Sea una progresión geométrica donde el primer término es 50 y el cuarto término es $86{,}4$.

Sea S_n la suma de los n primeros términos de la progresión.

Halle el valor más pequeño de n para el cual $S_n > 33\,500$.

4. [Puntuación máxima: 7]

La población de una ciudad t años después del 1 de enero de 2014 se puede modelizar mediante la función

$$P(t) = 15\,000\mathrm{e}^{kt}\text{, donde } k < 0 \text{ y } t \geq 0\,.$$

Se sabe que, entre el 1 de enero de 2014 y el 1 de enero de 2022, la población disminuyó un 11%.

Utilice este modelo para estimar cuál será la población de esta ciudad el 1 de enero de 2041.

5. [Puntuación máxima: 6]

Considere el desarrollo de $\dfrac{(ax+1)^9}{21x^2}$, donde $a \neq 0$. El coeficiente del término en x^4 es $\dfrac{8}{7}a^5$.

Halle el valor de a.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Puntuación máxima: 8]

La variable aleatoria continua X tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} axe^{x}, & 0 \le x \le b \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}$$

donde a, $b \in \mathbb{R}^{+}$.

(a) Halle una expresión que dé a en función de b. [5]

(b) En el caso en el que $a = b = 1$, halle la mediana de X. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Puntuación máxima: 6]

Considere los vectores $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{v} = \left(\cos\frac{1}{n}\right)\boldsymbol{i} + \left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)\boldsymbol{j}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

Sea θ el ángulo que forman $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

(a) Halle una expresión que dé $\cos\theta$ en función de n. [3]

(b) Halle el valor exacto del límite al que se acerca θ cuando $n \to \infty$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

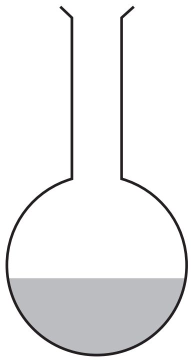
. . . .

. . . .

. . . .

8. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra un líquido contenido en un frasco de cristal de base redondeada, formado por una esfera y un cuello cilíndrico.



Inicialmente el frasco está vacío. El líquido se vierte en el frasco a un ritmo de $2\,\mathrm{cm}^3\mathrm{s}^{-1}$. Puede suponer que el líquido no llega hasta el cuello cilíndrico.

El volumen $(V\,\mathrm{cm}^3)$ y la altura $(h\,\mathrm{cm})$ del líquido contenido en el frasco satisfacen la ecuación $V = 5\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$.

Halle la razón de cambio de la altura del líquido contenido en el frasco en el instante en el que el volumen del líquido es igual a $200\,\mathrm{cm}^3$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

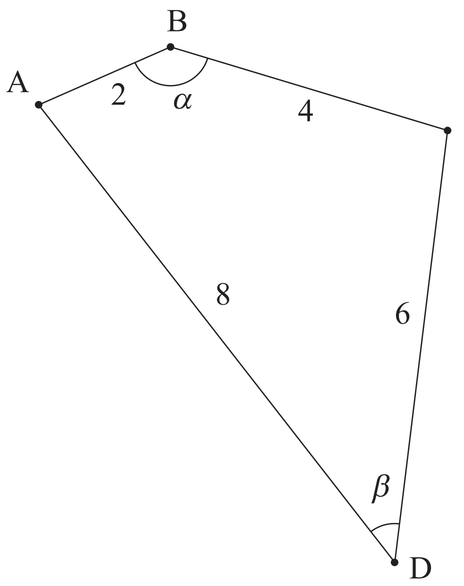
. . . .

. . . .

9. [Puntuación máxima: 8]

Considere el cuadrilátero ABCD, donde $\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{BC}=4$, $\mathrm{CD}=6$ y $\mathrm{DA}=8$, como se muestra en la siguiente figura. Sea $\alpha=\mathrm{A\hat{B}C}$ y $\beta=\mathrm{A\hat{D}C}$.

la figura no está dibujada a escala



(a) (i) Halle AC en función de α.

(ii) Halle AC en función de β.

(iii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle una expresión que dé α en función de β. [4]

(b) Halle el área máxima del cuadrilátero ABCD. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 16]

En una gran empresa, el tiempo que trabajan los empleados (T horas por semana) sigue una distribución normal de media 42 y desviación típica igual a $10{,}7$.

(a) Halle la probabilidad de que un empleado elegido al azar trabaje más de 40 horas por semana. [2]

(b) Se escoge al azar un grupo de cuatro empleados. A estos empleados se les va preguntando, de uno en uno, si trabajan más de 40 horas por semana. Halle la probabilidad de que el cuarto empleado sea el único del grupo que trabaja más de 40 horas por semana. [3]

(c) Hay un grupo grande de empleados que trabajan más de 40 horas por semana.

(i) Se escoge al azar a un empleado de este grupo grande.

Halle la probabilidad de que dicho empleado trabaje menos de 55 horas por semana.

(ii) Se escoge al azar a diez empleados de este grupo grande.

Halle la probabilidad de que exactamente cinco de ellos trabajen menos de 55 horas por semana. [7]

Se sabe que $\mathrm{P}(a \le T \le b) = 0{,}904$ y que $\mathrm{P}(T > b) = 2\mathrm{P}(T < a)$, donde a y b son números de horas trabajadas por semana. A los empleados que trabajan menos de a horas por semana se les considera trabajadores a tiempo parcial.

(d) Halle el tiempo máximo (en horas por semana) que puede trabajar un empleado para que se le pueda seguir considerando trabajador a tiempo parcial. [4]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 15]

La función f se define así: $f(x) = e^{2x}(3x - 4)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

(a) Halle $f'(x)$. [3]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle las coordenadas del punto del gráfico de $y = f(x)$ en el que la tangente es paralela a la recta $y = x$. [3]

La región que está delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y el eje y se rota 2π radianes alrededor del eje x, generando así un sólido de revolución.

(c) Halle el volumen de este sólido. [4]

Considere ahora una función g, tal que $g(0) = 1$ y $g'(0) = 2$.

(d) Halle el valor de:

(i) $(f \circ g)(0)$

(ii) $(f \circ g)'(0)$ [5]

12. [Puntuación máxima: 22]

Considere los puntos $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(k, -2, 1)$ y $\mathrm{C}(5, 0, 2)$, donde $k \in \mathbb{R}$.

(a) Escriba $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. [2]

(b) Sabiendo que los puntos A, B y C forman una línea recta, muestre que $k = 9$. [1]

(c) Para $k = 9$, sea L_1 la recta que pasa por A, B y C.

(i) Halle la ecuación vectorial de la recta L_1.

(ii) La recta L_2 tiene por ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 1 - z$. Muestre que las rectas L_1 y L_2 son alabeadas. [10]

(d) Para $k \neq 9$, sea Π el plano que contiene a A, B y C.

(i) Halle la ecuación cartesiana del plano Π.

(ii) Halle las coordenadas del punto del plano Π que está más cerca del origen $(0, 0, 0)$. [9]

Referencias: