Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
2. Klausur

Dienstag, 1. November 2022 (Vormittag)

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antwortheft ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

8822 – 7127

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 5]

Die folgende Tabelle zeigt die von einer Gruppe von acht Schülern erreichten Test-Punktzahlen in den Fächern Mathematik (x) und Naturwissenschaften (y).

Punkte in Mathematik (x)	64	68	72	75	80	82	85	86
Punkte in Naturwissenschaften (y)	67	72	77	76	84	83	89	91

Die Regressionsgerade von y auf x für diese Daten kann in der Form $y = ax + b$ geschrieben werden.

(a) Finden Sie die Werte von a und b. [2]

(b) Notieren Sie den Wert des Pearsonschen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten r. [1]

(c) Sagen Sie mit Hilfe der Gleichung Ihrer Regressionsgeraden das Ergebnis des Tests in Naturwissenschaften für einen Schüler vorher, der im Mathematik-Test 78 Punkte erzielt hat. Geben Sie Ihre Antwort gerundet auf die nächste ganze Zahl an. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

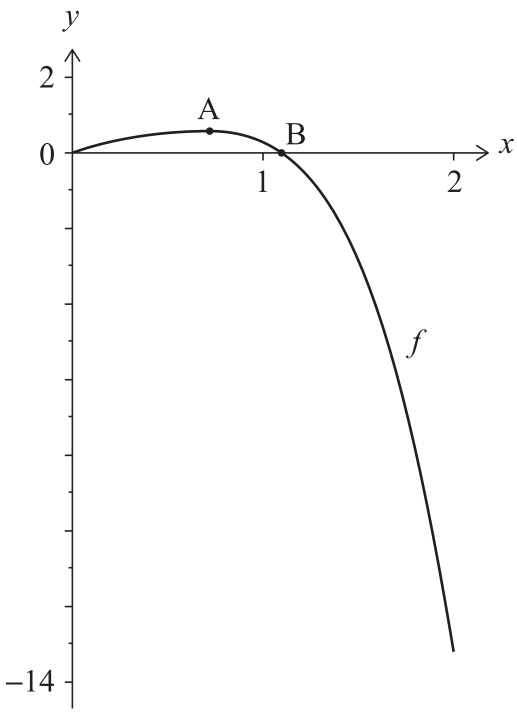
. . . .

. . . .

. . . .

2. [Maximale Punktzahl: 6]

Die Funktion f ist definiert als $f(x) = \ln(xe^x + 1) - x^4$ für $0 \le x \le 2$. Der Graph von f ist im folgenden Diagramm dargestellt.



Der Graph von f hat ein lokales Maximum im Punkt A. Der Graph schneidet die x-Achse im Ursprung und im Punkt B.

(a) Finden Sie die Koordinaten von A. [2]

(b) Finden Sie die x-Koordinate von B. [1]

(c) Finden Sie die Gesamtfläche, die von dem Graphen von f, der x-Achse und der Gerade $x = 2$ eingeschlossen wird. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. [Maximale Punktzahl: 5]

Der erste Term einer geometrischen Folge ist 50 und der vierte $86{,}4$.

Die Summe der ersten n Terme der Folge ist S_n.

Finden Sie den kleinsten Wert von n so, dass $S_n > 33\,500$.

4. [Maximale Punktzahl: 7]

Die Einwohnerzahl einer Stadt t Jahre nach dem 1. Januar 2014 lässt sich durch folgende Funktion modellieren:

$$P(t) = 15\,000\mathrm{e}^{kt}, \text{ mit } k < 0 \text{ und } t \geq 0.$$

Es ist bekannt, dass die Bevölkerung zwischen dem 1. Januar 2014 und dem 1. Januar 2022 um 11% zurückgegangen ist.

Schätzen Sie mit Hilfe dieses Modells die Einwohnerzahl dieser Stadt am 1. Januar 2041.

5. [Maximale Punktzahl: 6]

Betrachten Sie die Entwicklung von $\frac{(ax+1)^9}{21x^2}$, mit $a \neq 0$. Der Koeffizient des x^4-Terms ist $\frac{8}{7}a^5$.

Finden Sie den Wert von a.

6. [Maximale Punktzahl: 8]

Die Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion einer stetigen Zufallsvariable X ist gegeben durch:

$$f(x)=\begin{cases} ax\mathrm{e}^{x}, & 0\le x\le b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit a, $b \in \mathbb{R}^{+}$.

(a) Finden Sie einen Ausdruck für a in Abhängigkeit von b. [5]

(b) Finden Sie für den Fall $a = b = 1$ den Median von X. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. [Maximale Punktzahl: 6]

Betrachten Sie die Vektoren $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{v} = \left(\cos\frac{1}{n}\right)\boldsymbol{i} + \left(\sin\frac{1}{n}\right)\boldsymbol{j}$, mit $n \in \mathbb{Z}^{+}$.

θ sei der Winkel zwischen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$.

(a) Finden Sie einen Ausdruck für $\cos\theta$ in Abhängigkeit von n. [3]

(b) Finden Sie den genauen Wert des Grenzwerts von θ für $n \to \infty$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

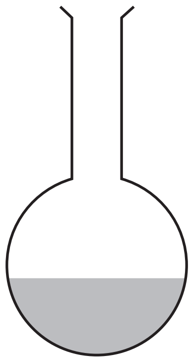
. . . .

. . . .

. . . .

8. [Maximale Punktzahl: 6]

Die folgende Abbildung zeigt eine Flüssigkeit in einem Glaskolben mit rundem Boden, der aus einer Kugel und einem zylindrischen Hals besteht.



Zu Beginn ist der Kolben leer. Die Flüssigkeit wird mit einer Geschwindigkeit von $2\,\mathrm{cm^3 s^{-1}}$ in den Kolben gegossen. Sie können davon ausgehen, dass die Flüssigkeit den zylindrischen Hals nicht erreicht.

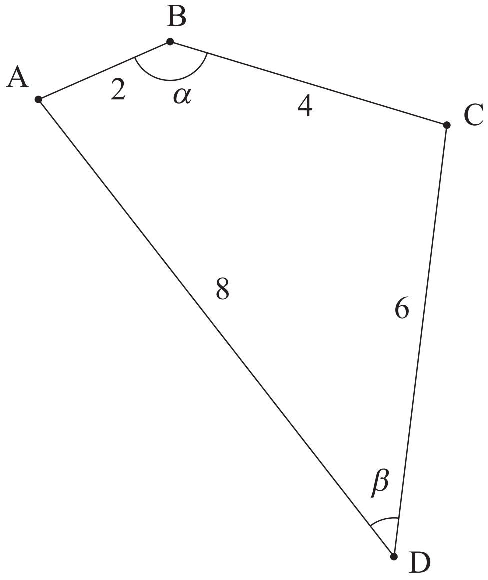
Das Volumen V in $\mathrm{cm^3}$ und die Höhe h in cm der Flüssigkeit im Kolben erfüllen folgende Gleichung: $V = 5\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$.

Finden Sie die Änderungsrate der Flüssigkeitshöhe im Kolben zu dem Zeitpunkt, an dem das Volumen der Flüssigkeit $200\,\mathrm{cm^3}$ beträgt.

9. [Maximale Punktzahl: 8]

Betrachten Sie ein Viereck ABCD mit $\mathrm{AB} = 2$, $\mathrm{BC} = 4$, $\mathrm{CD} = 6$ und $\mathrm{DA} = 8$, wie in der folgenden Abbildung dargestellt. Es seien $\alpha = \mathrm{A\hat{B}C}$ und $\beta = \mathrm{A\hat{D}C}$.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



(a) (i) Finden Sie AC in Abhängigkeit von α.

(ii) Finden Sie AC in Abhängigkeit von β.

(iii) Finden Sie damit oder auf andere Weise einen Ausdruck für α in Abhängigkeit von β. [4]

(b) Finden Sie den maximalen Flächeninhalt des Vierecks ABCD. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 16]

Die von den Mitarbeitern eines großen Unternehmens geleistete Arbeitszeit T in Stunden pro Woche ist normalverteilt mit einem Mittelwert von 42 und einer Standardabweichung von $10{,}7$.

(a) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mitarbeiter mehr als 40 Stunden pro Woche arbeitet. [2]

(b) Eine Gruppe von vier Mitarbeitern wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Jeder Mitarbeiter wird nacheinander gefragt, ob er mehr als 40 Stunden pro Woche arbeitet. Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der vierte Mitarbeiter der Einzige in der Gruppe ist, der mehr als 40 Stunden pro Woche arbeitet. [3]

(c) Eine große Zahl an Mitarbeitern arbeitet mehr als 40 Stunden pro Woche.

(i) Aus dieser großen Gruppe wird ein Mitarbeiter nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Mitarbeiter weniger als 55 Stunden pro Woche arbeitet.

(ii) Aus dieser großen Gruppe werden zehn Mitarbeiter nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau fünf von ihnen weniger als 55 Stunden pro Woche arbeiten. [7]

Es ist bekannt, dass $\mathrm{P}(a \le T \le b) = 0{,}904$ und $\mathrm{P}(T > b) = 2\mathrm{P}(T < a)$. Hierbei sind a und b die Anzahl der pro Woche geleisteten Arbeitsstunden. Mitarbeiter, die weniger als a Stunden pro Woche arbeiten, gelten als Teilzeitkräfte.

(d) Finden Sie die maximale Arbeitszeit in Stunden pro Woche, die ein Mitarbeiter arbeiten kann, sodass er immer noch als Teilzeitkraft gilt. [4]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 15]

Die Funktion f ist definiert durch $f(x) = \mathrm{e}^{2x}(3x-4)$, mit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie $f'(x)$. [3]

(b) Finden Sie damit oder auf andere Weise die Koordinaten des Punktes auf dem Graphen von $y = f(x)$, an dem die Tangente parallel zur Geraden $y = x$ verläuft. [3]

Die von der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und der y-Achse begrenzte Fläche wird mit 2π (rad) um die x-Achse gedreht und bildet dadurch einen Rotationskörper.

(c) Finden Sie das Volumen dieses Körpers. [4]

Betrachten Sie eine Funktion g so, dass $g(0) = 1$ und $g'(0) = 2$.

(d) Finden Sie den Wert von

(i) $(f \circ g)(0)$;

(ii) $(f \circ g)'(0)$. [5]

12. [Maximale Punktzahl: 22]

Betrachten Sie die Punkte $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(k, -2, 1)$ und $\mathrm{C}(5, 0, 2)$, mit $k \in \mathbb{R}$.

(a) Notieren Sie $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ und $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. [2]

(b) Zeigen Sie, dass $k = 9$ ist, wenn die Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen. [1]

(c) Für den Fall $k = 9$ sei L_1 die durch A, B und C verlaufende Gerade.

(i) Finden Sie eine Vektorgleichung der Geraden L_1.

(ii) Die Gerade L_2 hat die Gleichung $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 1 - z$. Zeigen Sie, dass die Geraden L_1 und L_2 windschief sind. [10]

(d) Für den Fall $k \neq 9$ sei Π die Ebene, welche die Punkte A, B und C enthält.

(i) Finden Sie die Koordinatengleichung der Ebene Π.

(ii) Finden Sie die Koordinaten des Punktes auf der Ebene Π der dem Ursprung $(0, 0, 0)$ am nächsten liegt. [9]

Quellen: