Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 1

Lundi 31 octobre 2022 (après-midi)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n’est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d’examen et à votre page de couverture en utilisant l’attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[110 points]**.

8822 – 7116

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 4]

La fonction g est définie par $g(x) = \mathrm{e}^{x^2 + 1}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Trouvez $g'(-1)$.

2. [Note maximale : 7]

Considérez un cercle de diamètre AB, où les coordonnées de A sont $(1\,;\,4\,;\,0)$ et les coordonnées de B sont $(-3\,;\,2\,;\,-4)$.

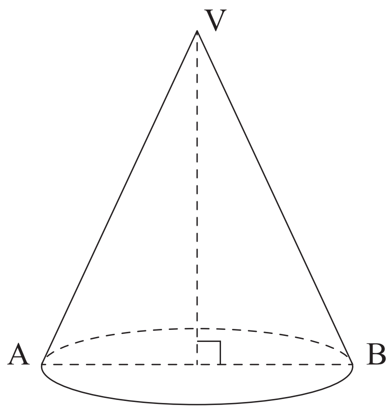
(a) Trouvez

(i) les coordonnées du centre du cercle ;

(ii) le rayon du cercle. [4]

Le cercle forme la base d'un cône droit dont les coordonnées du sommet V sont $(-1\,;\,-1\,;\,0)$.

la figure n'est pas à l'échelle



(b) Trouvez le volume exact du cône. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Note maximale : 5]

Soit a une constante, où $a > 1$.

(a) Montrez que $a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$. [3]

Considérez un triangle rectangle dont les côtés mesurent a, $\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)$ et $\left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)$.

(b) Trouvez une expression pour l'aire du triangle en fonction de a. [2]

4. [Note maximale : 5]

La dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$.

La représentation graphique de $y = f(x)$ passe par le point $(1\,;\,5)$. Trouvez une expression pour $f(x)$.

5. [Note maximale : 7]

Considérez l'équation $z^4 + pz^3 + 54z^2 - 108z + 80 = 0$, où $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{R}$.

Trois des racines de l'équation sont $3 + \mathrm{i}$, α et α^2, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) En considérant le produit de toutes les racines de l'équation, trouvez la valeur de α. [4]

(b) Trouvez la valeur de p. [3]

6. [Note maximale : 6]

Les événements A et B sont tels que $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$ et $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$.

(a) Déterminez la valeur de $\mathrm{P}(A \cap B)$ dans le cas où les événements A et B sont indépendants. [1]

(b) Déterminez la valeur minimale possible de $\mathrm{P}(A \cap B)$. [3]

(c) Déterminez la valeur maximale possible de $\mathrm{P}(A \cap B)$, en justifiant votre réponse. [2]

7. [Note maximale : 7]

Considérez la courbe d'équation $(x^2 + y^2)y^2 = 4x^2$, où $x \geq 0$ et $-2 < y < 2$.

Montrez que la courbe n'a ni maximum relatif ni minimum relatif pour $x > 0$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

8. [Note maximale : 5]

Soit $f(x) = \cos(x - k)$, où $0 \le x \le a$ et $a, k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Considérez le cas où $k = \dfrac{\pi}{2}$.

En esquissant une représentation graphique appropriée, ou par toute autre méthode, trouvez la plus grande valeur de a pour laquelle la fonction réciproque f^{-1} existe. [2]

(b) Trouvez la plus grande valeur de a pour laquelle la fonction réciproque f^{-1} existe dans le cas où $k = \pi$. [1]

(c) Trouvez la plus grande valeur de a pour laquelle la fonction réciproque f^{-1} existe dans le cas où $\pi < k < 2\pi$. Donnez votre réponse en fonction de k. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

9. [Note maximale : 10]

Considérez l'équation différentielle homogène $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - 2x^2}{xy}$, où $x, y \neq 0$.

On sait que $y = 2$ lorsque $x = 1$.

(a) En utilisant la substitution $y = vx$, résolvez l'équation différentielle. Donnez votre réponse sous la forme $y^2 = f(x)$. [8]

Les points de pente nulle sur la courbe $y^2 = f(x)$ se situent sur deux droites de la forme $y = mx$, où $m \in \mathbb{R}$.

(b) Trouvez les valeurs de m. [2]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 20]

La fonction f est définie par $f(x) = \cos^2 x - 3\sin^2 x$, $0 \le x \le \pi$.

(a) Trouvez les racines de l’équation $f(x) = 0$. [5]

(b) (i) Trouvez $f'(x)$.

(ii) À partir de là, trouvez les coordonnées des points sur la représentation graphique de $y = f(x)$ où $f'(x) = 0$. [7]

(c) Esquissez la représentation graphique de $y = |f(x)|$, en montrant clairement les coordonnées de tout point où $f'(x) = 0$ et celles de tout point où la représentation graphique coupe les axes des coordonnées. [4]

(d) À partir de là ou par toute autre méthode, résolvez l’inéquation $|f(x)| > 1$. [4]

11. [Note maximale : 16]

Considérez un code à trois chiffres abc, où l’on attribue à a, b et c une valeur choisie parmi 1, 2, 3, 4 ou 5.

(a) Trouvez le nombre total de codes possibles

(i) en supposant que chaque valeur peut être répétée (par exemple, 121 ou 444) ;

(ii) en supposant qu’aucune valeur n’est répétée. [4]

Soit $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où l’on attribue à a, b et c une valeur choisie parmi 1, 2, 3, 4 ou 5. On suppose qu’aucune valeur n’est répétée.

Considérez le cas où $P(x)$ a un facteur $(x^2 + 3x + 2)$.

(b) (i) Trouvez une expression pour b en fonction a.

(ii) À partir de là, montrez que la seule façon d’attribuer les valeurs est $a = 4$, $b = 5$ et $c = 2$.

(iii) Exprimez $P(x)$ comme un produit de facteurs linéaires.

(iv) À partir de là ou par toute autre méthode, esquissez la représentation graphique de $y = P(x)$, en montrant clairement les coordonnées de tout point d’intersection avec les axes. [12]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 18]

Soit z_n le nombre complexe défini par $z_n = (n^2 + n + 1) + \mathrm{i}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) (i) Trouvez $\arg(z_0)$.

(ii) Écrivez une expression pour $\arg(z_n)$ en fonction de n. [3]

Soit $w_n = z_0 z_1 z_2 z_3 \ldots z_{n-1} z_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) (i) Montrez que $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$, pour a, $b \in \mathbb{R}^+$, $ab < 1$.

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, montrez que $\arg(w_1) = \arctan(2)$. [5]

(c) Prouvez par récurrence que $\arg(w_n) = \arctan(n+1)$, pour $n \in \mathbb{N}$. [10]

Références :