Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
1. Klausur

Montag, 31. Oktober 2022 (Nachmittag)

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

12 Seiten
8822 – 7126

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 4]

Die Funktion g ist definiert durch $g(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Finden Sie $g'(-1)$.

2. [Maximale Punktzahl: 7]

Betrachten Sie einen Kreis mit dem Durchmesser AB, wobei A die Koordinaten $(1, 4, 0)$ und B die Koordinaten $(-3, 2, -4)$ hat.

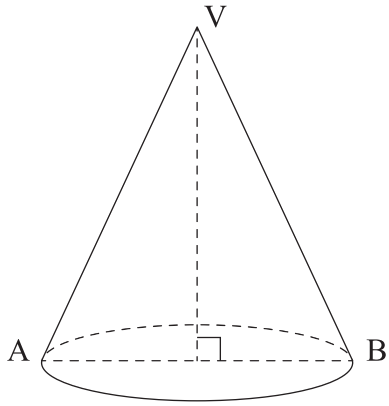
(a) Finden Sie

(i) die Koordinaten des Kreismittelpunkts;

(ii) den Radius des Kreises. [4]

Der Kreis bildet die Basis eines senkrechten Kegels, dessen Spitze V die Koordinaten $(-1, -1, 0)$ hat.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



(b) Finden Sie das genaue Volumen des Kegels. [3]

Bitte umblättern

3. [Maximale Punktzahl: 5]

Es sei a eine Konstante mit $a > 1$.

(a) Zeigen Sie: $a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$. [3]

Betrachten Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit Seiten der Länge a, $\left(\frac{a^2-1}{2}\right)$ und $\left(\frac{a^2+1}{2}\right)$.

(b) Finden Sie einen Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von a. [2]

4. [Maximale Punktzahl: 5]

Die Ableitung der Funktion f ist gegeben durch $f'(x) = \frac{6x}{x^2+1}$.

Der Graph von $y = f(x)$ verläuft durch den Punkt $(1, 5)$. Finden Sie einen Ausdruck für $f(x)$.

5. [Maximale Punktzahl: 7]

Betrachten Sie die Gleichung $z^4 + pz^3 + 54z^2 - 108z + 80 = 0$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{R}$.

Drei Lösungen der Gleichung sind $3 + \mathrm{i}$, α und α^2, mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie mit Hilfe des Produkts aller Lösungen der Gleichung den Wert von α. [4]

(b) Finden Sie den Wert von p. [3]

6. [Maximale Punktzahl: 6]

Für die Ereignisse A und B gilt $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$ und $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$.

(a) Bestimmen Sie den Wert von $\mathrm{P}(A \cap B)$ für den Fall, dass die Ereignisse A und B unabhängig sind. [1]

(b) Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert von $\mathrm{P}(A \cap B)$. [3]

(c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wert von $\mathrm{P}(A \cap B)$ und begründen Sie Ihre Antwort. [2]

7. [Maximale Punktzahl: 7]

Betrachten Sie die Kurve mit der Gleichung $(x^2 + y^2)y^2 = 4x^2$ mit $x \geq 0$ und $-2 < y < 2$.

Zeigen Sie, dass die Kurve für $x > 0$ keine lokalen Maxima oder Minima hat.

8. [Maximale Punktzahl: 5]

Sei $f(x) = \cos(x - k)$ für $0 \le x \le a$ und $a, k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Betrachten Sie den Fall $k = \frac{\pi}{2}$.

Finden Sie durch Skizzieren eines geeigneten Graphen oder auf andere Weise den größten Wert von a für den die inverse Funktion f^{-1} existiert. [2]

(b) Finden Sie den größten Wert von a, für den die inverse Funktion f^{-1} existiert, sofern $k = \pi$ gilt. [1]

(c) Finden Sie den größten Wert von a , für den die inverse Funktion f^{-1} existiert, sofern $\pi < k < 2\pi$ gilt. Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von k an. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Maximale Punktzahl: 10]

Betrachten Sie die homogene Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - 2x^2}{xy}$ mit $x, y \neq 0$.

Es ist bekannt, dass $y = 2$ für $x = 1$.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe der Substitution $y = vx$. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $y^2 = f(x)$ an. [8]

Die Punkte der Kurve mit Steigung Null $y^2 = f(x)$ liegen auf zwei Geraden der Form $y = mx$ mit $m \in \mathbb{R}$.

(b) Finden Sie die Werte von m. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 20]

Die Funktion f ist definiert durch $f(x) = \cos^2 x - 3\sin^2 x$ für $0 \le x \le \pi$.

(a) Finden Sie die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$. [5]

(b) (i) Finden Sie $f'(x)$.

(ii) Finden Sie damit die Koordinaten der Punkte auf dem Graphen von $y = f(x)$ mit $f'(x) = 0$. [7]

(c) Skizzieren Sie den Graphen von $y = |f(x)|$. Zeigen Sie dabei deutlich die Koordinaten der Punkte, für die $f'(x) = 0$ gilt, sowie aller Punkte, an denen der Graph die Koordinatenachsen schneidet. [4]

(d) Lösen Sie damit oder auf andere Weise die Ungleichung $|f(x)| > 1$. [4]

11. [Maximale Punktzahl: 16]

Betrachten Sie einen dreistelligen Code abc, wobei jede der Stellen a, b und c einem der Werte 1, 2, 3, 4 oder 5 zugeordnet ist.

(a) Finden Sie die Gesamtzahl der möglichen Codes

(i) unter der Annahme, dass jeder Wert wiederholt werden kann (zum Beispiel 121 oder 444);

(ii) unter der Annahme, dass kein Wert wiederholt wird. [4]

Es sei $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, wobei den Variablen a, b und c jeweils einer der Werte 1, 2, 3, 4 oder 5 zugeordnet ist. Gehen Sie davon aus, dass kein Wert wiederholt wird.

Betrachten Sie den Fall, dass $P(x)$ einen Faktor $(x^2 + 3x + 2)$ aufweist.

(b) (i) Finden Sie einen Ausdruck für b in Abhängigkeit von a.

(ii) Zeigen Sie damit, dass die einzige Möglichkeit der Wertzuordnung $a = 4$, $b = 5$ und $c = 2$ ist.

(iii) Drücken Sie $P(x)$ als Produkt von Linearfaktoren aus.

(iv) Skizzieren Sie damit oder auf andere Weise den Graphen von $y = P(x)$, und zeigen Sie dabei deutlich die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen. [12]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 18]

Es sei z_n die durch $z_n = (n^2 + n + 1) + \mathrm{i}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte komplexe Zahl.

(a) (i) Finden Sie $\arg(z_0)$.

(ii) Notieren Sie einen Ausdruck für $\arg(z_n)$ in Abhängigkeit von n. [3]

Es sei $w_n = z_0 z_1 z_2 z_3 \ldots z_{n-1} z_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) (i) Zeigen Sie, dass $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$, $ab < 1$.

(ii) Zeigen Sie damit oder auf andere Weise, dass $\arg(w_1) = \arctan(2)$. [5]

(c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $\arg(w_n) = \arctan(n+1)$ für $n \in \mathbb{N}$. [10]

Quellen: