

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Matemáticas: Análisis y Enfoques

## Nivel Superior

### Prueba 1

Lunes 1 de noviembre de 2021 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

#### Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.





2. [Puntuación máxima: 9]

La función  $f$  viene dada por  $f(x) = \frac{2x+4}{3-x}$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 3$ .

(a) Escriba la ecuación de:

(i) La asíntota vertical del gráfico de  $f$

(ii) La asíntota horizontal del gráfico de  $f$

[2]

(b) Halle las coordenadas de los puntos donde el gráfico de  $f$  corta:

(i) Al eje  $x$

(ii) Al eje  $y$

[2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

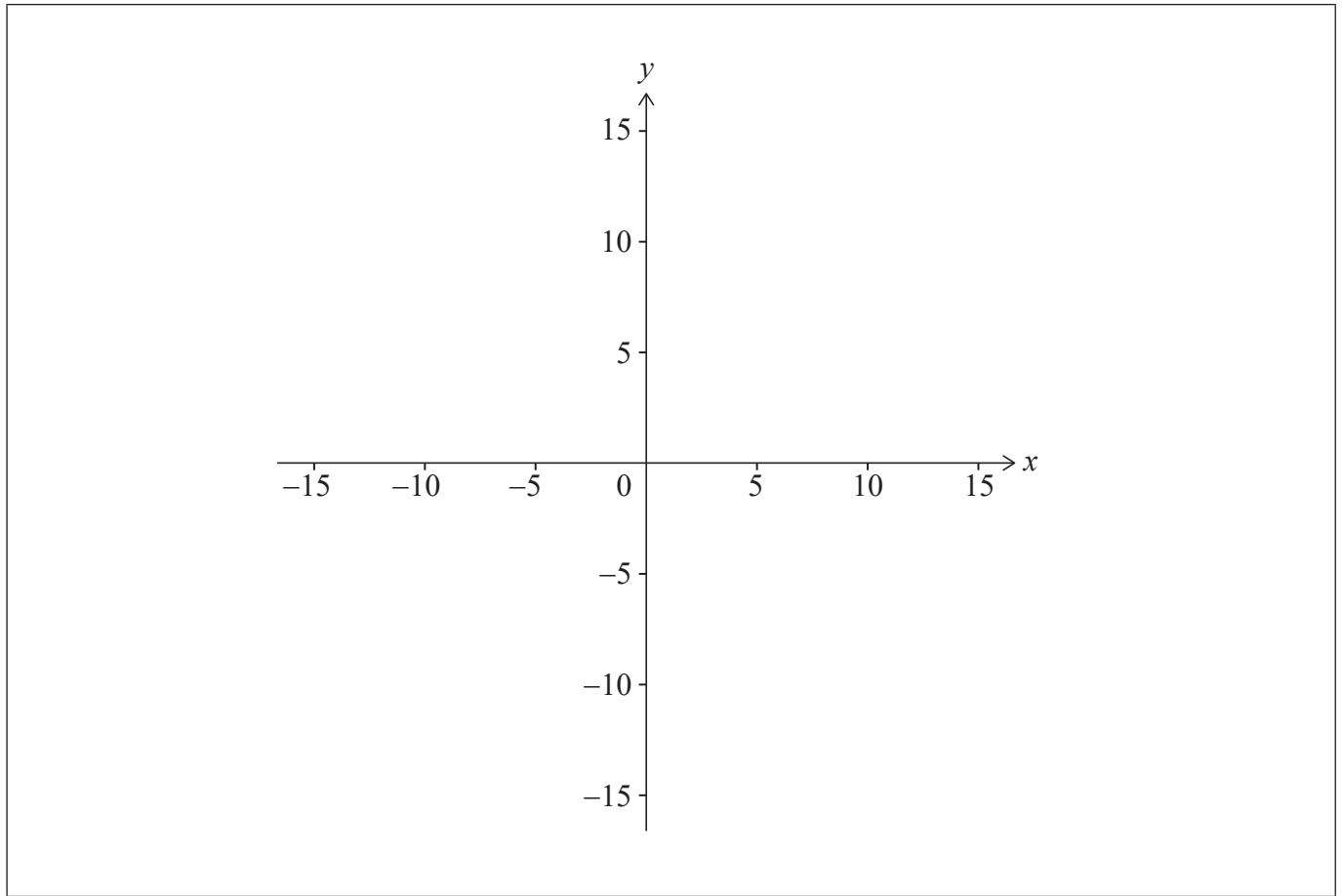
.....

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



**(Pregunta 2: continuación)**

(c) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de  $f$ . [1]



La función  $g$  viene dada por  $g(x) = \frac{ax+4}{3-x}$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 3$  y  $a \in \mathbb{R}$ .

(d) Sabiendo que  $g(x) = g^{-1}(x)$ , determine el valor de  $a$ . [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Puntuación máxima: 5]

Resuelva la ecuación  $\log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{2\log_2 3} + \log_3(4x^3)$ , donde  $x > 0$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Puntuación máxima: 5]

La caja 1 contiene 5 bolas rojas y 2 bolas blancas.  
La caja 2 contiene 4 bolas rojas y 3 bolas blancas.

- (a) Se escoge una caja al azar y se extrae una bola. Halle la probabilidad de que la bola sea roja. [3]

Sea  $A$  el suceso “se escoge la caja 1” y sea  $R$  el suceso “se extrae una bola roja”.

- (b) Determine si los sucesos  $A$  y  $R$  son independientes. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





5. [Puntuación máxima: 7]

La función  $f$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ . La recta que tiene por ecuación  $y = 6x - 1$  es la tangente al gráfico de  $f$  en  $x = 4$ .

(a) Escriba el valor de  $f'(4)$ . [1]

(b) Halle  $f(4)$ . [1]

La función  $g$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ , donde  $g(x) = x^2 - 3x$  y  $h(x) = f(g(x))$ .

(c) Halle  $h(4)$ . [2]

(d) A partir de lo anterior, halle la ecuación de la tangente al gráfico de  $h$  en  $x = 4$ . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





7. [Puntuación máxima: 7]

La ecuación  $3px^2 + 2px + 1 = p$  tiene dos raíces reales y distintas.

(a) Halle los posibles valores de  $p$ . [5]

(b) Considere el caso en el que  $p = 4$ . Las raíces de la ecuación se pueden expresar en la forma  $x = \frac{a \pm \sqrt{13}}{6}$ , donde  $a \in \mathbb{Z}$ . Halle el valor de  $a$ . [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





9. [Puntuación máxima: 7]

Considere la expresión  $\frac{1}{\sqrt{1+ax}} - \sqrt{1-x}$ , donde  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $a \neq 0$ .

El desarrollo de la potencia de un binomio para esta expresión, en potencias ascendentes de  $x$ , hasta el término en  $x^2$  es  $4bx + bx^2$ , donde  $b \in \mathbb{Q}$ .

- (a) Halle el valor de  $a$  y el valor de  $b$ . [6]
- (b) Indique la restricción que hay que imponer a  $x$  para que este desarrollo sea válido. [1]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



No escriba soluciones en esta página.

### Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 16]

Una partícula  $P$  se mueve a lo largo del eje  $x$ . La velocidad de  $P$  es igual a  $v \text{ m s}^{-1}$  en el instante  $t$  segundos, donde  $v(t) = 4 + 4t - 3t^2$  para  $0 \leq t \leq 3$ . Cuando  $t = 0$ ,  $P$  se encuentra en el origen  $O$ .

- (a) (i) Halle el valor de  $t$  para el que  $P$  alcanza su velocidad máxima.
- (ii) Muestre que, en ese instante, la distancia de  $P$  a  $O$  es igual a  $\frac{88}{27}$  metros. [7]
- (b) Dibuje aproximadamente el gráfico de  $v$  en función de  $t$ , mostrando claramente todos los puntos de intersección con los ejes que haya. [4]
- (c) Halle la distancia total que ha recorrido  $P$ . [5]

11. [Puntuación máxima: 14]

- (a) Demuestre mediante inducción matemática que  $\frac{d^n}{dx^n}(x^2 e^x) = [x^2 + 2nx + n(n-1)]e^x$  para  $n \in \mathbb{Z}^+$ . [7]
- (b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, determine la serie de Maclaurin para  $f(x) = x^2 e^x$  en potencias ascendentes de  $x$ , hasta (e incluido) el término en  $x^4$ . [3]
- (c) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, determine el valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(x^2 e^x - x^2)^3}{x^9} \right]$ . [4]



No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 22]

Considere la ecuación  $(z - 1)^3 = i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Las raíces de esta ecuación son  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$ , donde  $\text{Im}(\omega_2) > 0$  e  $\text{Im}(\omega_3) < 0$ .

- (a) (i) Verifique que  $\omega_1 = 1 + e^{\frac{i\pi}{6}}$  es una raíz de esta ecuación.
- (ii) Halle  $\omega_2$  y  $\omega_3$ , expresándolas en la forma  $a + e^{i\theta}$ , donde  $a \in \mathbb{R}$  y  $\theta > 0$ . [6]

Las raíces  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$  se pueden representar mediante los puntos A, B y C, respectivamente, en un diagrama de Argand.

- (b) Sitúe los puntos A, B y C en un diagrama de Argand. [4]
- (c) Halle AC. [3]

Considere la ecuación  $(z - 1)^3 = iz^3$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

- (d) Utilizando el teorema de De Moivre, muestre que  $\alpha = \frac{1}{1 - e^{\frac{i\pi}{6}}}$  es una raíz de esta ecuación. [3]
- (e) Determine el valor de  $\text{Re}(\alpha)$ . [6]

Fuentes:

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021



**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP15



**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP16