Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
3. Klausur

Donnerstag, 12. Mai 2022 (Vormittag)

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

5 Seiten

2222 – 7128

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 28]

In dieser Frage sollen Sie die Eigenschaften einer Kurvenfamilie vom Typ $y^2 = x^3 + ax + b$ für unterschiedliche Werte von a und b, mit $a, b \in \mathbb{N}$, untersuchen.

(a) Skizzieren Sie im selben Koordinatensystem die folgenden Kurven im Bereich $-2 \le x \le 2$ und $-2 \le y \le 2$, und kennzeichnen Sie deutlich die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

(i) $y^2 = x^3$, $x \ge 0$ [2]

(ii) $y^2 = x^3 + 1$, $x \ge -1$ [2]

(b) (i) Notieren Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte der Kurve $y^2 = x^3 + 1$. [1]

(ii) Identifizieren Sie unter Berücksichtigung der Kurven aus Teil (a) zwei wesentliche Merkmale, in denen sich die verschiedenen Kurven voneinander unterscheiden. [1]

Betrachten wir nun Kurven der Art $y^2 = x^3 + b$, für $x \ge -\sqrt[3]{b}$ und mit $b \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Schlagen Sie durch Variation des Werts von b zwei gemeinsame Eigenschaften dieser Kurven vor. [2]

Betrachten wir nun die Kurve $y^2 = x^3 + x$, $x \ge 0$.

(d) (i) Zeigen Sie, dass $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\dfrac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$, für $x > 0$. [3]

(ii) Deduzieren Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass die Kurve $y^2 = x^3 + x$ keine lokalen Minima oder Maxima aufweist. [1]

Die Kurve $y^2 = x^3 + x$ hat zwei Wendepunkte. Aufgrund der Symmetrie der Kurve haben diese Punkte die gleiche x-Koordinate.

(e) Finden Sie den Wert dieser x-Koordinate und geben Sie Ihre Antwort in der Form $x = \sqrt{\dfrac{p\sqrt{3}+q}{r}}$ an, mit p, q, $r \in \mathbb{Z}$. [7]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

$\mathrm{P}(x, y)$ heißt „rationaler Punkt“ einer Kurve, wenn x und y rationale Zahlen sind.

Die Tangente an die Kurve $y^2 = x^3 + ax + b$ an einem rationalen Punkt P schneidet die Kurve in einem weiteren rationalen Punkt Q.

Sei C die Kurve von $y^2 = x^3 + 2$, für $x \geq -\sqrt[3]{2}$. Der rationale Punkt $\mathrm{P}(-1, -1)$ liegt auf C.

(f) (i) Finden Sie die Gleichung der Tangenten an C durch P. [2]

(ii) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit die Koordinaten des rationalen Punkts Q, in dem diese Tangente die Kurve C schneidet. Drücken Sie dabei die beiden Koordinaten als Brüche aus. [2]

(g) Der Punkt $\mathrm{S}(-1, 1)$ liegt ebenfalls auf C. Die Gerade $[\mathrm{QS}]$ schneidet C in einem weiteren Punkt. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes. [5]

2. [Maximale Punktzahl: 27]

In dieser Frage sollen Sie die Bedingungen für die Existenz komplexer Lösungen von Polynomgleichungen des Grads 3 und 4 untersuchen.

Die kubische Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, mit p, q, $r \in \mathbb{R}$, hat die Lösungen α, β und γ.

(a) Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren von $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, dass gilt:

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

$$r = -\alpha\beta\gamma.$$ [3]

(b) (i) Zeigen Sie, dass gilt: $p^2 - 2q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. [3]

(ii) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass gilt: $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 2p^2 - 6q$. [3]

(c) Deduzieren Sie unter der Voraussetzung, dass $p^2 < 3q$ gilt, dass α, β und γ nicht alle reell sein können. [2]

Betrachten Sie die Gleichung $x^3 - 7x^2 + qx + 1 = 0$, mit $q \in \mathbb{R}$.

(d) Zeigen Sie anhand des Ergebnisses aus Teil (c): Falls $q = 17$ gilt, hat diese Gleichung mindestens eine komplexe Lösung. [2]

Noah glaubt: Wenn $p^2 \geq 3q$, dann sind sowohl α, β als auch γ reelle Zahlen.

(e) (i) Bestimmen Sie durch Variation des Wertes von q in der Gleichung $x^3 - 7x^2 + qx + 1 = 0$ den kleinsten positiven ganzzahligen Wert von q, mit dem man zeigen kann, dass Noah falsch liegt. [2]

(ii) Erklären Sie, warum die Gleichung mindestens eine reelle Lösung für alle Werte von q hat. [1]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Betrachten wir nun Polynomgleichungen vom Grad 4.

Die Gleichung $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, mit p, q, r, $s \in \mathbb{R}$, hat die Lösungen α, β, γ und δ.

In ähnlicher Weise wie bei der kubischen Gleichung lässt sich zeigen, dass gilt:

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

$$q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$$

$$r = -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)$$

$$s = \alpha\beta\gamma\delta.$$

(f) (i) Finden Sie einen Ausdruck für $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ in Abhängigkeit von p und q. [3]

(ii) Geben Sie unter Nutzung der Vorarbeit eine Bedingung in Abhängigkeit von p und q an, die impliziert, dass $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ mindestens eine komplexe Lösung hat. [1]

(g) Zeigen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus Teil (f)(ii), dass die Gleichung $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$ mindestens eine komplexe Lösung hat. [1]

Die Gleichung $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12 = 0$ hat eine ganzzahlige Lösung.

(h) (i) Geben Sie an, was das Ergebnis in Teil (f)(ii) in Bezug auf diese Gleichung $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12 = 0$ aussagt. [1]

(ii) Notieren Sie die ganzzahlige Lösung dieser Gleichung. [1]

(iii) Beweisen Sie durch Umschreiben von $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12$ als Produkt eines linearen und eines kubischen Faktors, dass die Gleichung mindestens eine komplexe Lösung hat. [4]

Quellen: