Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 2

Lundi 9 mai 2022 (matin)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d’examen et à votre page de couverture en utilisant l’attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[110 points]**.

2222 – 7117

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

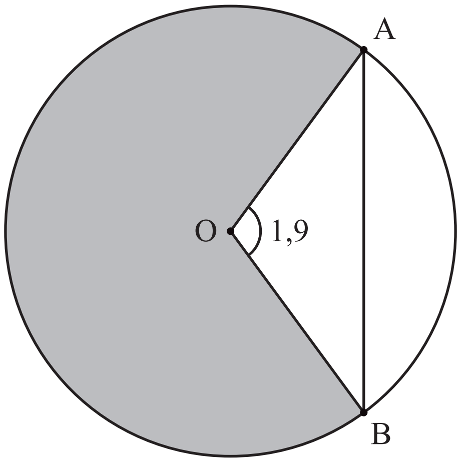
Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre un cercle de centre O et de rayon 5 mètres.

Les points A et B se situent sur le cercle et $\mathrm{A\hat{O}B} = 1{,}9$ radian.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Trouvez la longueur de la corde $[\mathrm{AB}]$. [3]

(b) Trouvez l'aire du secteur grisé. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Note maximale : 5]

La dérivée d'une fonction g est donnée par $g'(x) = 3x^2 + 5e^x$, où $x \in \mathbb{R}$. La représentation graphique de g passe par le point $(0\ ;\ 4)$. Trouvez $g(x)$.

3. [Note maximale : 6]

Les événements A et B sont indépendants et $\mathrm{P}(A) = 3\mathrm{P}(B)$.

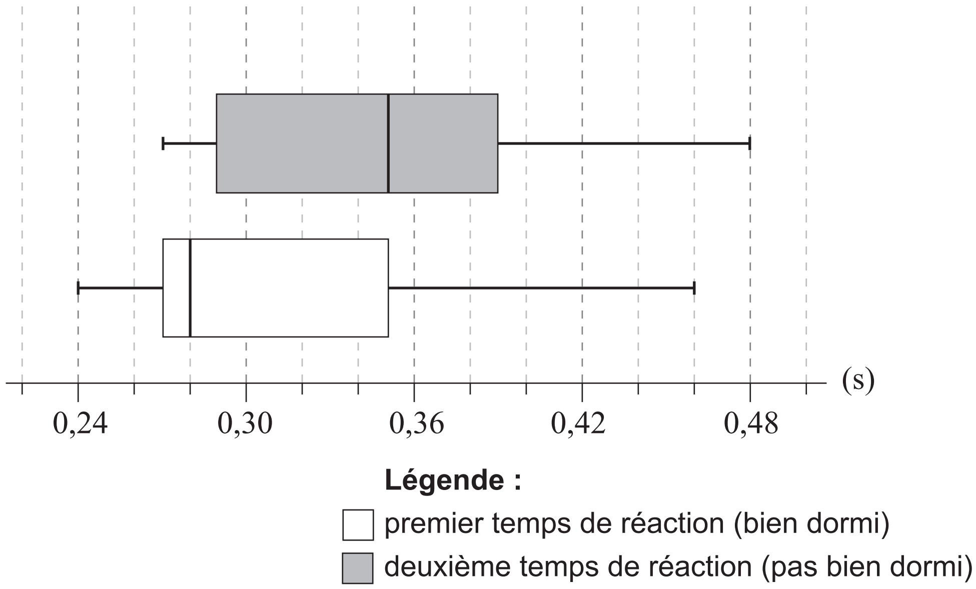
Étant donné que $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}68$, trouvez $\mathrm{P}(B)$.

4. [Note maximale : 6]

Un échantillon aléatoire de neuf adultes a été sélectionné pour savoir si bien dormir affectait leur temps de réaction à un stimulus visuel. Le temps de réaction de chaque adulte a été mesuré deux fois.

La première mesure du temps de réaction a été prise un matin après que l'adulte a bien dormi. La deuxième mesure a été prise un matin après que le même adulte n'a pas bien dormi.

Les diagrammes en boîte pour les temps de réaction, mesurés en secondes, sont montrés ci-dessous.



Considérez le diagramme en boîte qui représente les temps de réaction après avoir bien dormi.

(a) Indiquez le temps de réaction médian après avoir bien dormi. [1]

(b) Vérifiez que la mesure de $0,46$ seconde n'est pas une valeur aberrante. [3]

(c) Indiquez pourquoi il semblerait que le temps de réaction moyen soit supérieur au temps de réaction médian. [1]

Considérez maintenant les deux diagrammes en boîte.

(d) Commentez, à savoir, si ces diagrammes en boîte fournissent des preuves pouvant suggérer que le fait de ne pas bien dormir cause une augmentation du temps de réaction. [1]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 4)

5. [Note maximale : 7]

Une particule se déplace en ligne droite de sorte que sa vitesse algébrique, $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, au temps t secondes est donnée par $v = \dfrac{(t^2+1)\cos t}{4}$, $0 \le t \le 3$.

(a) Déterminez quand la particule change sa direction de mouvement. [2]

(b) Trouvez les instants auxquels l'accélération de la particule est de $-1{,}9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. [3]

(c) Trouvez l'accélération de la particule lorsque sa vitesse est maximale. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

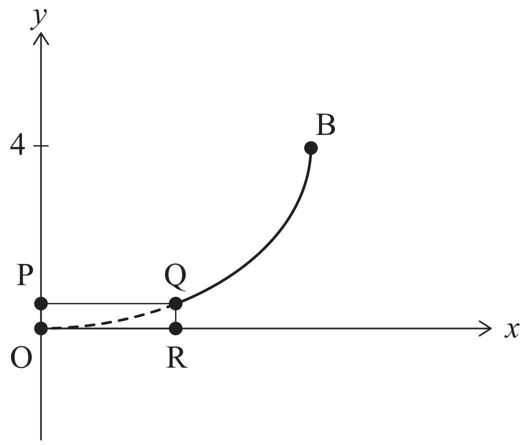
. . . .

. . . .

6. [Note maximale : 5]

Le diagramme suivant montre la courbe $\frac{x^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$, où $h \le y \le 4$.

la figure n’est pas à l’échelle



La partie de la courbe comprise entre le point Q et le point B subit une rotation de $360°$ autour de l’axe des ordonnées pour former la surface intérieure d’un bol. Le rectangle OPQR de hauteur $h\,\mathrm{cm}$ subit une rotation de $360°$ autour de l’axe des ordonnées pour former une base solide.

On suppose que l’épaisseur du bol est négligeable.

Étant donné que le volume intérieur du bol est de $285\,\mathrm{cm}^3$, déterminez la hauteur de la base.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Note maximale : 8]

Considérez $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(\cos x) - k}{x^2}$, où $k \in \mathbb{R}$.

(a) Montrez qu'une limite finie existe seulement pour $k = \dfrac{\pi}{4}$. [2]

(b) En utilisant la règle de L'Hôpital, montrez algébriquement que la valeur de la limite est $-\dfrac{1}{4}$. [6]

8. [Note maximale : 7]

Rachel et Sophia participent à une compétition de lancer du javelot.

Les distances, R mètres, correspondant aux lancers de Rachel peuvent être modélisées par une distribution normale de moyenne $56{,}5$ et d’écart type 3.

Les distances, S mètres, correspondant aux lancers de Sophia peuvent être modélisées par une distribution normale de moyenne $57{,}5$ et d’écart type $1{,}8$.

Au premier tour de la compétition, chaque concurrent doit effectuer cinq lancers. Pour se qualifier pour le tour suivant de la compétition, un concurrent doit enregistrer, au premier tour, au moins un lancer de 60 mètres ou plus.

Trouvez la probabilité que seule Rachel ou Sophia se qualifie pour le prochain tour de la compétition.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

9. [Note maximale : 4]

Considérez l'ensemble des nombres entiers positifs à six chiffres qui peuvent être formés à partir des chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9.

Trouvez le nombre total d'entiers positifs à six chiffres qui peuvent être formés tels que

(a) tous les chiffres sont différents ; [2]

(b) tous les chiffres sont différents et ils sont en ordre croissant. [2]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 15]

Un scientifique a mené une expérience durant neuf semaines sur deux plantes, A et B, de la même espèce. Il voulait déterminer l’effet de l’utilisation d’un nouvel engrais. La plante A a régulièrement reçu de l’engrais, tandis que la plante B n’en a pas reçu.

Le scientifique a trouvé que la hauteur de la Plante A, $h_A\,\text{cm}$, au temps t semaines peut être modélisée par la fonction $h_A(t) = \sin(2t + 6) + 9t + 27$, où $0 \le t \le 9$.

Le scientifique a trouvé que la hauteur de la Plante B, $h_B\,\text{cm}$, au temps t semaines peut être modélisée par la fonction $h_B(t) = 8t + 32$, où $0 \le t \le 9$.

(a) Utilisez les modèles du scientifique pour trouver la hauteur initiale de

(i) la Plante B ;

(ii) la Plante A, correcte à trois chiffres significatifs près. [3]

(b) Trouvez les valeurs de t lorsque $h_A(t) = h_B(t)$. [3]

(c) Pour $t > 6$, prouvez que la Plante A était toujours plus haute que la Plante B. [3]

(d) Pour $0 \le t \le 9$, trouvez le temps total pendant lequel le taux de croissance de la Plante B était supérieur au taux de croissance de la Plante A. [6]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 20]

Les vecteurs-position de deux avions, A et B, par rapport à une origine O sont donnés respectivement par

$$\boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

où t représente le temps en minutes et $0 \le t \le 2{,}5$.

Les composantes de chaque vecteur-colonne donnent le déplacement vers l’est à partir de O, le déplacement vers le nord à partir de O et la distance au-dessus du niveau de la mer, toutes ces mesures étant en kilomètres.

(a) Trouvez le relèvement correspondant à l’avion B. [2]

(b) Montrez que l’avion A se déplace à une plus grande vitesse que l’avion B. [2]

(c) Trouvez l’angle aigu entre les trajectoires de vol des deux avions. Donnez votre réponse en degrés. [4]

Les trajectoires de vol des deux avions se coupent au point P.

(d) (i) Trouvez les coordonnées de P.

(ii) Déterminez le laps de temps entre l’arrivée du premier avion en P et l’arrivée du deuxième avion en P. [7]

Soit $D(t)$ la distance entre l’avion A et l’avion B pour $0 \le t \le 2{,}5$.

(e) Trouvez la valeur minimale de $D(t)$. [5]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 21]

La population, P, d'une espèce particulière de marsupial vivant sur une petite île isolée peut être modélisée par l'équation différentielle logistique

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right),$$

où t est le temps mesuré en années et k, N sont des constantes positives.

La constante N représente la population maximale de cette espèce de marsupial que l'île peut supporter indéfiniment.

(a) Dans le contexte du modèle de la population, interprétez le sens de $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$. [1]

(b) Montrez que $\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}t^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{N}\right)\left(1 - \frac{2P}{N}\right)$. [4]

(c) À partir de là, montrez que la population de marsupiaux augmentera à son taux maximal lorsque $P = \frac{N}{2}$. Justifiez votre réponse. [5]

(d) À partir de là, déterminez la valeur maximale de $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ en fonction de k et N. [2]

Soit P_0 la population initiale de marsupiaux.

(e) En résolvant l'équation différentielle logistique, montrez que sa solution peut être exprimée sous la forme

$$kt = \ln \frac{P}{P_0}\left(\frac{N - P_0}{N - P}\right).$$ [7]

Après 10 ans, la population de marsupiaux est de $3P_0$. On sait que $N = 4P_0$.

(f) Trouvez la valeur de k pour ce modèle de population. [2]

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.