Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma



International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

# Matemáticas: Análisis y Enfoques
# Nivel Superior
# Prueba 1

Viernes 6 de mayo de 2022 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

2 horas

## Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2222 – 7121

14 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

## Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

**1.** [Puntuación máxima: 5]

El $n$-ésimo término de una progresión aritmética viene dado por $u_n = 15 - 3n$.

(a) Indique el valor del primer término $(u_1)$. [1]

(b) Sabiendo que el $n$-ésimo término de esta progresión es $-33$, halle el valor de $n$. [2]

(c) Halle la diferencia común $(d)$. [2]

**2.** [Puntuación máxima: 6]

Considere tres números enteros consecutivos cualesquiera: $n-1$, $n$ y $n+1$.

(a) Pruebe que la suma de estos tres números enteros siempre es divisible entre $3$. [2]

(b) Pruebe que la suma de los cuadrados de estos tres números enteros no es nunca divisible entre $3$. [4]

**3.** [Puntuación máxima: 8]

La función $f$ se define así: $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{x+1}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$.

(a) El gráfico de $y=f(x)$ tiene una asíntota vertical y una asíntota horizontal.

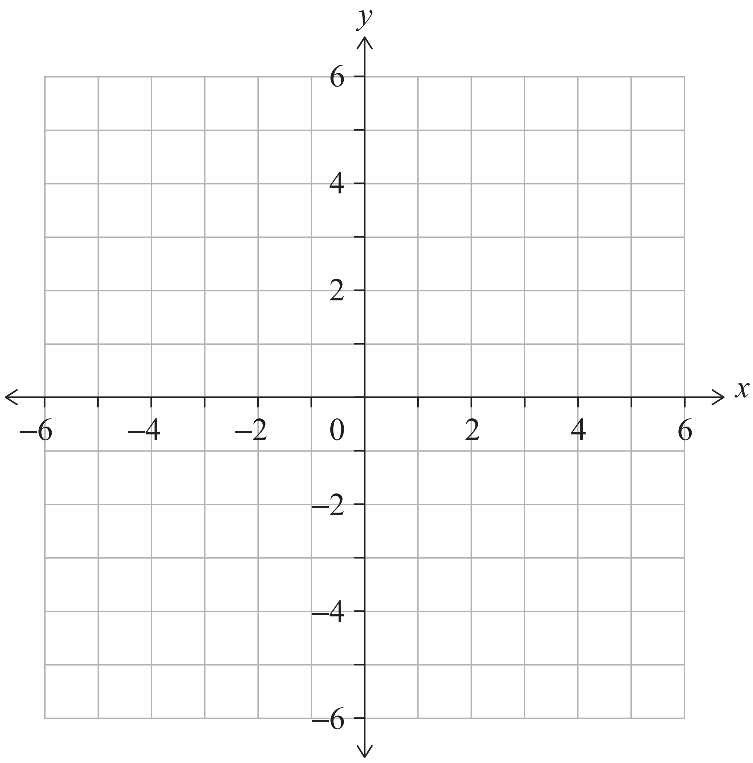
Escriba la ecuación de:

(i) La asíntota vertical

(ii) La asíntota horizontal [2]

(b) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de $y=f(x)$ .

En ese mismo dibujo aproximado, indique claramente las asíntotas y la posición de todos los puntos de intersección con los ejes que haya. [3]




(c) A partir de lo anterior, resuelva la inecuación $0<\dfrac{2x-1}{x+1}<2$. [1]

(d) Resuelva la inecuación $0<\dfrac{2\left|x\right|-1}{\left|x\right|+1}<2$. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 3: continuación)**

**4.** [Puntuación máxima: 5]

Halle el menor valor positivo de $x$ para el cual se cumple que $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**5.** [Puntuación máxima: 7]

Considere el siguiente desarrollo de la potencia de un binomio:
$(x+1)^7 = x^7 + ax^6 + bx^5 + 35x^4 + \ldots + 1$, donde $x \neq 0$ y $a$, $b \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Muestre que $b = 21$. [2]

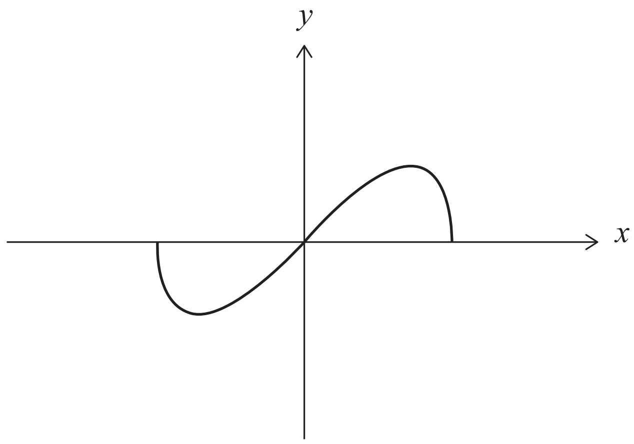
El tercer término del desarrollo es la media del segundo término y el cuarto término del desarrollo.

(b) Halle los posibles valores de $x$. [5]

**6.** [Puntuación máxima: 8]

La función $f$ se define así: $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, donde $-1 \le x \le 1$.

A continuación se muestra el gráfico de $y = f(x)$.




(a) Muestre que $f$ es una función impar. [2]

El recorrido de $f$ es $a \le y \le b$, donde $a$, $b \in \mathbb{R}$.

(b) Halle el valor de $a$ y el valor de $b$. [6]

**7.** [Puntuación máxima: 6]

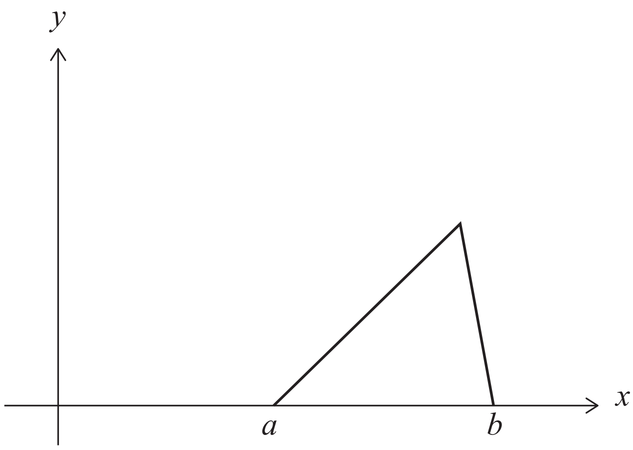
Utilizando la sustitución $u = \sec x$ o de cualquier otro modo, halle una expresión para $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^n x \tan x \, \mathrm{d}x$ en función de $n$, donde $n$ es un número real distinto de cero.

**8.** [Puntuación máxima: 6]

Una variable aleatoria continua $X$ tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(b-a)(c-a)}(x-a), & a\le x\le c\\ \dfrac{2}{(b-a)(b-c)}(b-x), & c<x\le b\\ 0, & \text{resto de valores}\end{cases}.$$

La siguiente figura muestra el gráfico de $y=f(x)$ para $a\le x\le b$.




Sabiendo que $c\ge\dfrac{a+b}{2}$, halle una expresión para la mediana de $X$ en función de $a$, $b$ y $c$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**9.** [Puntuación máxima: 5]

Prueba por contradicción que la ecuación $2x^3 + 6x + 1 = 0$ no tiene ninguna raíz entera.

**No** escriba soluciones en esta página.

## Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

**10.** [Puntuación máxima: 16]

Se tira un dado no equilibrado de cuatro caras, rotuladas $1$, $2$, $3$ y $4$, y se va anotando el resultado. Sea $X$ el resultado que se obtiene al tirar el dado. En la siguiente tabla se muestra la distribución de probabilidad de $X$, donde $p$ y $q$ son constantes.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $p$ | 0,3 | $q$ | 0,1 |

Para esta distribución de probabilidad, se sabe que $\mathrm{E}(X)=2$.

(a) Muestre que $p=0{,}4$ y $q=0{,}2$. [5]

(b) Halle $\mathrm{P}(X>2)$. [2]

Nicky decide jugar a un juego con este dado de cuatro caras. En este juego está permitido tirar el dado cinco veces como máximo. La puntuación se calcula sumando los resultados de todas las tiradas. Nicky gana el juego si obtiene una puntuación de al menos diez.

Después de tirar el dado tres veces, la puntuación de Nicky es igual a cuatro.

(c) Suponiendo que las tiradas del dado son independientes unas de otras, halle la probabilidad de que Nicky gane el juego. [5]

David tiene dos pares de dados equilibrados de cuatro caras: un par amarillo y un par rojo.

Los dos dados amarillos tienen las caras rotuladas así: $1$, $2$, $3$ y $4$. Sea $S$ la suma que se obtiene al tirar los dos dados amarillos. A continuación se muestra la distribución de probabilidad de $S$.

| $s$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(S=s)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

El primer dado rojo tiene las caras rotuladas así: $1$, $2$, $2$ y $3$. El segundo dado rojo tiene las caras rotuladas así: $1$, $a$, $a$ y $b$, donde $a<b$ y $a, b \in \mathbb{Z}^+$. La distribución de probabilidad de la suma que se obtiene al tirar el par rojo es igual a la distribución de la suma que se obtiene al tirar el par amarillo.

(d) Determine el valor de $b$. [2]

(e) Halle el valor de $a$, aportando pruebas que respalden su respuesta. [2]

**No** escriba soluciones en esta página.

**11.** [Puntuación máxima: 20]

La función $f$ se define así: $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$, $x \neq 3$.

(a) Dibuje aproximadamente la curva $y=f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas que haya con sus correspondientes ecuaciones. Indique también las coordenadas de todos los máximos y mínimos locales y de todos los puntos de intersección con los ejes de coordenadas que haya. [6]

La función $g$ se define así: $g(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x > 3$.

(b) La inversa de $g$ es $g^{-1}$.

(i) Muestre que $g^{-1}(x)=1+\dfrac{\sqrt{4x^2+x}}{x}$.

(ii) Indique el dominio de $g^{-1}$. [7]

La función $h$ se define así: $h(x)=\arctan\dfrac{x}{2}$, donde $x \in \mathbb{R}$.

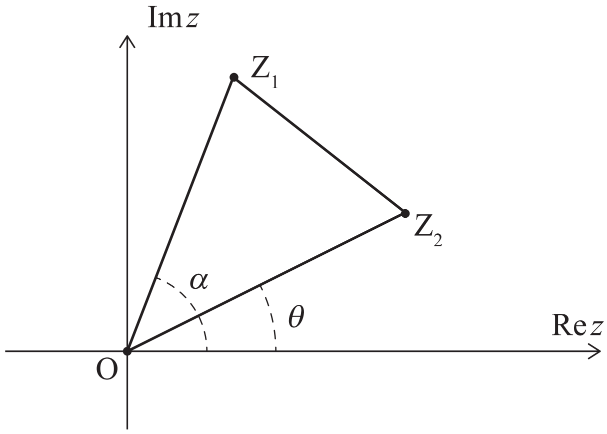
(c) Sabiendo que $(h \circ g)(a)=\dfrac{\pi}{4}$, halle el valor de $a$.

Dé la respuesta en la forma $p+\dfrac{q}{2}\sqrt{r}$, donde $p$, $q$, $r \in \mathbb{Z}^+$. [7]

**No** escriba soluciones en esta página.

**12.** [Puntuación máxima: 18]

En el siguiente diagrama de Argand, los puntos $\mathrm{Z}_1$, $\mathrm{O}$ y $\mathrm{Z}_2$ son los vértices del triángulo $\mathrm{Z}_1\mathrm{O}\mathrm{Z}_2$, descrito en sentido contrario a las agujas del reloj.




El punto $\mathrm{Z}_1$ representa el número complejo $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, donde $r_1 > 0$. El punto $\mathrm{Z}_2$ representa el número complejo $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, donde $r_2 > 0$.

Los ángulos $\alpha$, $\theta$ se miden en sentido contrario a las agujas del reloj desde la parte positiva del eje real, de modo tal que $0 \le \alpha,\ \theta < 2\pi$ y $0 < \alpha - \theta < \pi$.

(a) Muestre que $z_1 z_2{}^* = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha - \theta)}$, donde $z_2{}^*$ es el número complejo conjugado de $z_2$. [2]

(b) Sabiendo que $\mathrm{Re}(z_1 z_2{}^*) = 0$, muestre que $\mathrm{Z}_1\mathrm{O}\mathrm{Z}_2$ es un triángulo rectángulo. [2]

En los apartados (c), (d) y (e), considere el caso particular en el que $\mathrm{Z}_1\mathrm{O}\mathrm{Z}_2$ es un triángulo equilátero.

(c) (i) Exprese $z_1$ en función de $z_2$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $z_1{}^2 + z_2{}^2 = z_1 z_2$. [6]

Sean $z_1$ y $z_2$ las raíces distintas de la ecuación $z^2 + az + b = 0$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $a,\ b \in \mathbb{R}$.

(d) Utilice el resultado del subapartado (c)(ii) para mostrar que $a^2 - 3b = 0$. [5]

Considere la ecuación $z^2 + az + 12 = 0$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$.

(e) Sabiendo que $0 < \alpha - \theta < \pi$, deduzca que con el punto $\mathrm{O}$ y las raíces de esta ecuación se puede formar un solo triángulo equilátero $\mathrm{Z}_1\mathrm{O}\mathrm{Z}_2$. [3]

---

**Referencias:**

**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.