Bachillerato Internacional

Portada de la Monografía

Los alumnos deben llenar esta hoja y entregarla al supervisor junto con la versión final de su monografía.			
Número de convocatoria del alumno			
Nombre y apellido(s) del alumno			
Número del colegio			
Nombre del colegio			
Convocatoria de exámenes (mayo o noviembre)	MAYO	Año	2013

Asignatura del Programa del Diploma en la que se ha inscrito la monografía: MATEMÁTICA NM

(En el caso de una monografía en lenguas, señale si se trata del Grupo 1 o el Grupo 2.)

Título de la monografía: LA EFICIENCIA DE LA ESFERA

Declaración del alumno

El alumno debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no reciba una calificación final.

Confirmo que soy el autor de este trabajo y que no he recibido más ayuda que la permitida por el Bachillerato Internacional.

He citado debidamente las palabras, ideas o gráficos de otra persona, se hayan expresado estos de forma escrita, oral o visual.

Sé que el máximo de palabras permitido para las monografías es 4.000, y que a los examinadores no se les pide que lean monografías que superen ese límite.

Esta es la versión final de mi monografía.

Firma del alumno: Fecha:

Informe y declaración del supervisor

El supervisor debe completar este informe, firmar la declaración y luego entregar esta portada junto con la versión final de la monografía al coordinador del Programa del Diploma.

Nombre y apellido(s) del supervisor [MAYÚSCULAS]:

Si lo considera adecuado, escriba algunos comentarios sobre el contexto en que el alumno desarrolló la investigación, las dificultades que encontró y cómo las ha superado (ver página 13 de la guía para la monografía). La entrevista final con el alumno puede ofrecer información útil. Estos comentarios pueden ayudar al examinador a conceder un nivel de logro para el criterio K (valoración global). No escriba comentarios sobre circunstancias adversas personales que puedan haber afectado al alumno. En el caso en que el número de horas dedicadas a la discusión de la monografía con el alumno sea cero, debe explicarse este hecho indicando cómo se ha podido garantizar la autoría original del alumno. Puede adjuntar una hoja adicional si necesita más espacio para escribir sus comentarios.

El supervisor debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no se otorgue una calificación final.

He leído la versión final de la monografía, la cual será entregada al examinador.

A mi leal saber y entender, la monografía es el trabajo auténtico del alumno.

He dedicado 4 horas a discutir con el alumno su progreso en la realización de la monografía.

Firma del supervisor: Fecha:

Formulario de evaluación (para uso exclusivo del examinador)

Criterios de evaluación	Examinador 1	Máximo	Examinador 2	Máximo	Examinador 3
		Nivel de logro			
A Formulación del problema de investigación	2	2		2	
B Introducción	1	2		2	
C Investigación	3	4		4	
D Conocimiento y comprensión del tema	3	4		4	
E Argumento razonado	2	4		4	
F Aplicación de habilidades de análisis y evaluación apropiadas para la asignatura	2	4		4	
G Uso de un lenguaje apropiado para la asignatura	2	4		4	
H Conclusión	0	2		2	
I Presentación formal	1	4		4	
J Resumen	1	2		2	
K Valoración global	2	4		4	
Total (máximo 36)	19				

LA EFICIENCIA DE LA ESFERA

i. AGRADECIMIENTOS

Es difícil poder condensar todo lo que tengo que decir en un corto texto. Primero, muchas gracias a mi querido , en especial por su paciencia. Más que este trabajo, su labor como guía durante todo el proceso es merecedora de reconocimiento. Muchas gracias por su ayuda cuando la necesite. También destacar a otros profesores de la asignatura que estuvieron presentes en nuestro largo camino del Bachillerato, como lo fueron y

También un breve reconocimiento a , a quien le agradezco por su preocupación. Le deseo lo mejor en su nueva aventura en el mundo maternal.

ii. DEDICATORIA

Al gran , quien me abrió las puertas a este grandioso mundo de las Matemáticas.

iii. ÍNDICE

i. Agradecimientos 2
ii. Dedicatoria 3
iii. Índice 4
iv. Resumen 5
1. Introducción 6
2. Generalidades 7
2.1 Definición 7
2.2 Características de la Esfera 7
2.3 Volumen de la Esfera 7
3. Desarrollo 10
3.1Deducción del volumen por otras vías 10
3.2 Demostración volumen óptimo 16
3.3 Búsqueda de espacio óptimo 22
4. Conclusión 27
5. Bibliografía 28

iv. RESUMEN

El siguiente trabajo estudia la esfera y su volumen. Se compone principalmente de tres partes. Primero existe una fase de deducción, en la cual se procede, mediante dos métodos distintos, a encontrar el volumen de una esfera. Luego se demuestra que la esfera es el cuerpo que más volumen contiene en relación a su área superficial. Por último se investiga qué cuerpo es más eficiente para contener una esfera inscrita, donde se comprueba que es el cilindro

Número Total de Palabras: 2204

1. INTRODUCCIÓN

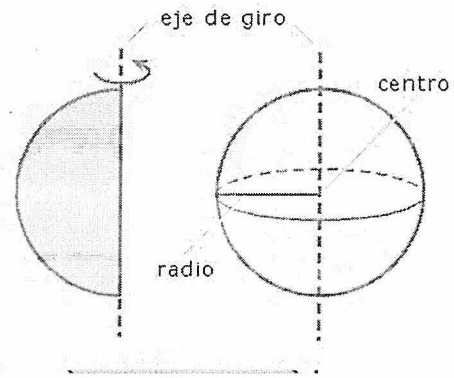
Fue el gran Henry Ford quien incentivó la producción en línea y masiva. Producir objetos en masa para tener mayores ingresos. Y es que desde esos tiempos el mundo, la política y la sociedad estaban en función del dinero. El mejor negocio es el que requiere el mínimo gasto para obtener las mayores ganancias, y para lograr esto recurrimos a la optimización; principalmente de las propiedades cualitativas de los productos: su calidad, su material, su forma.

El cuerpo de mayor volumen en relación a su superficie, tal y como quedara en este trabajo demostrado, es la esfera. Por lo que este documento invita a recordar lo óptimo que resulta ser la elaboración de un producto esférico. Para ello se procederá a recordar conceptos básicos en relación al cuerpo geométrico, la deducción de su volumen a través de distintos métodos y comprobaremos que efectivamente la esfera es el cuerpo que más volumen contiene en función de su área superficial. También descubriremos que tipo de envase es la mejor alternativa para contener un prod. esférico, es decir, que cuerpo es más eficiente al contener una esfera inscrita .

2. GENERALIDADES

2.1 DEFINICIÓN

Una esfera corresponde a un cuerpo redondo en el que todos sus puntos equidistan de otro llamado centro una distancia llamada radio[1]. Es simétricamente perfecta y se obtiene al hacer girar una semicircunferencia, la generatriz, sobre su diámetro, dígase, el eje de revolución. Además su nombre proviene del latín *sphaera* ("pelota"), a su vez del griego *σφαῖρα.*



2.1 CARACTERÍSTICAS DE UNA ESFERA

Aparte de los mencionados centro, radio, diámetro y el eje de giro o revolución, otros elementos de la esfera son la cuerda, que une dos puntos cualesquiera de la superficie de la esfera y los polos que son los puntos del eje de giro que quedan sobre la superficie esférica. Como se señaló en la introducción, y se detallara más adelante, la esfera es el cuerpo más voluminoso en relación con otros que tengan la misma superficie. No posee vértices ni aristas ni bases

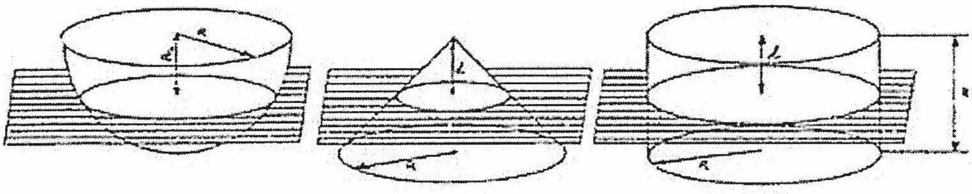
2.2 EL VOLUMEN DE UNA ESFERA

Árquimides podría considerarse el Padre de la medición de volúmenes. Recordemos que, según cuenta la anécdota, logró calcular el volumen de un objeto irregular al introducirlo en agua y medir el volumen desplazado del mencionado líquido.

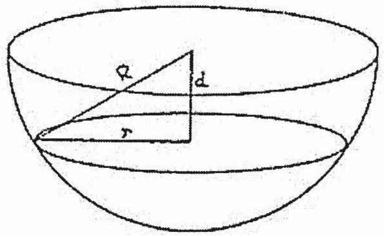
[1] Larousse. (2006). Diccionario escencial Matemáticas. México: Ediciones Larrouse.

Pero el erudito helénico también haría avances en la determinación de volúmenes de cuerpos regulares, como la esfera.

El sabio griego a logro deducir el volumen de una esfera utilizando una semiesfera, un cilindro y un cono. Arquímedes se planteó, qué pasaría si intersectaba, a la misma altura, una semiesfera de radio R, un cilindro de base radio R y altura R y un cono, también de base radio R y altura R, con un plano al igual que el siguiente esquema[2]

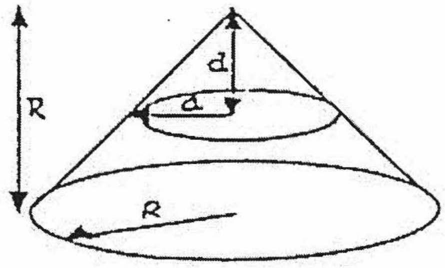


El griego concluyó que en la semiesfera[3] se generaría una circunferencia con un radio más pequeño 'r' y de área πr^2. Aplicando el teorema de Pitágoras, estableció que $r^2 + d^2 = R^2$



[2] Imagen de Gaussianos.com
[3] Imagen de Gaussianos.com

Así también como la semiesfera, el cono[4] generaba una circunferencia pero al ser un cono recto, la distancia d entre la cúspide y el corte era equivalente. Entonces su área era πd^2



En el caso del cilindro la circunferencia creada era congruente con la base, por lo que su área también valía πR^2. Si este valor anterior lo utilizamos en la igualdad pitagórica de la semiesfera obtenemos que

$$\pi R^2 = \pi d^2 + \pi r^2$$

Lo que nos deja entrever que

$$Sección\ Cilindro = Sección\ Cono + Sección\ Semiesfera$$

Que equivale a

$$Sección\ Cilindro - Sección\ Cono = Sección\ Semiesfera$$

Ahora, considerando que esto se cumple para cualquier sección; que a cualquier corte que se le efectúe a los cuerpos se mantendrá la relación, entonces

$$Volumen\ Cilindro - Volumen\ Cono = Volumen\ Semiesfera$$

[4] Imagen de Gaussianos.com

Como las fórmulas de volúmenes de cilindro y cono ya eran conocidas, Arquimides reemplazó

$$\pi R^3 - \frac{1}{3}R^3 = Volumen\ Semiesfera$$

$$\frac{2}{3}R^3 = Volumen\ Semiesfera$$

Y, lógicamente, para obtener la fórmula para la esfera completa, el sabio duplicó su cálculo

$$\frac{4}{3}R^3 = Volumen\ Esfera$$

Se puede calificar a Arquímedes como un pionero en los cálculos de volúmenes y este tipo de desarrollos son los que autentifican su gran rol en la Matemática

3. DESARROLLO DEL TEMA

3.1 DEDUCCIÓN DEL VOLUMEN POR OTRAS VÍAS

Paralelo al método de Arquímides existen distintos caminos para calcular la fórmula del volumen de una esfera. En esta ocasión se deducirá la mítica 'cuatro tercios pi erre cubo' a través de dos métodos que personalmente son de mi agrado, en especial porque se puede apreciar la belleza de conectar distintas áreas de las matemáticas. Primero, a través de la integración relacionaremos álgebra, cálculo y geometría. Luego, a través de sucesiones intentaremos llegar al mismo resultado. Importante agregar que esta decisión fue tomada además para utilizar varios conocimientos aprendidos durante el currículo de la asignatura

Iniciemos con una simple ecuación de una circunferencia

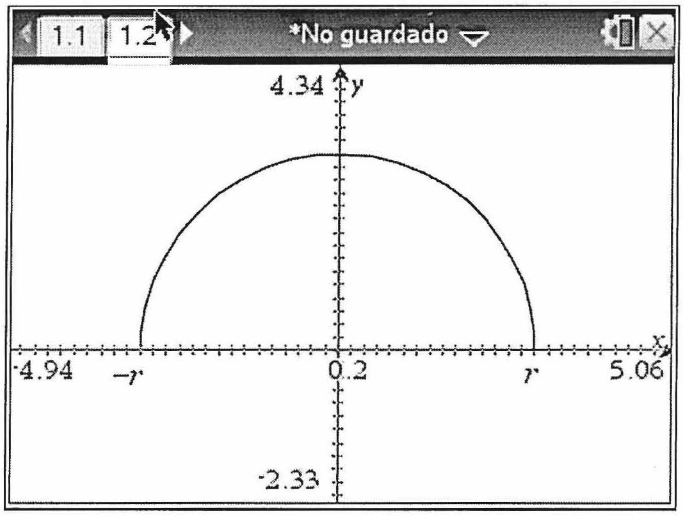
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Despejando *y*, encontramos que

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

De esta forma, la f(x) se vería así



Acto seguido, hacemos la hacemos girar sobre el eje x creando un sólido de revolución, en este caso, una esfera.

Recordemos que el volumen de un sólido de revolución corresponde a la suma de las áreas de los círculos generados por cada punto de la curva original al girar alrededor del eje. Así el volumen del cuerpo en revolución de una función g(x) dentro de un intervalo [a,b] es

$$V = \pi \cdot \left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]$$

De esta forma, el volumen de la esfera generada por la semicircunferencia vendría definido por

$$V = \pi \cdot \left[\int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx\right]$$

$$V = \pi \cdot \left[\int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx\right]$$

$$V = \pi \cdot \left[\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx\right]$$

$$V = \pi \cdot \left[\int_{-r}^{r} r^2\,dx - \int_{-r}^{r} x^2\,dx\right]$$

$$V = \pi \cdot \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-r}^{r}\right]$$

$$V = \pi \cdot \left[r^2 r - \frac{1}{3}r^3 - (r^2(-r) - \frac{1}{3}(-r)^3)\right]$$

$$V = \pi \cdot \left[r^3 - \frac{1}{3}r^3 - (-r^3 + \frac{1}{3}r^3)\right]$$

$$V = \pi \cdot \left[r^3 - \frac{1}{3}r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3\right]$$

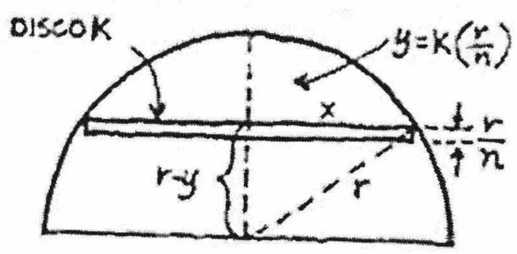
$$V = \pi \cdot \left[2r^3 - \frac{2}{3}r^3\right]$$

$$V = \pi \left[\frac{6r^3 - 2r^3}{3}\right]$$

$$V = \pi \left[\frac{4r^3}{3}\right]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Tal y como se comprobó, 'todos los caminos llevan a Roma', incluso en las matemáticas, bueno, en este caso sí. A continuación se procederá a descomponer una semiesfera en n discos de igual grosor. En el siguiente esquema[5] vemos un disco K inscrito en una semiesfera de radio r.



Aplicando el teorema de Pitágoras sobre el diagrama:

$$x^2 + (r - y)^2 = r^2$$

$$x^2 = r^2 - (r - y)^2$$

$$x^2 = r^2 - r^2 + 2ry - y^2$$

$$x^2 = 2ry - y^2$$

Sabiendo que $y = k\left(\frac{r}{n}\right)$, reemplazamos

$$x^2 = 2rk\left(\frac{r}{n}\right) - \left(k\left(\frac{r}{n}\right)\right)^2$$

[5] Imagen de: Simmons, G. F. (2003). Precalculus Mathematics in a Nutshell: Geometry, Algebra, Trigonometry. Oregon: Wipf & Stock Publishers.

Ahora, el volumen del Disco k se podría calcular de la siguiente forma,

$$V_k = \pi x^2 \left(\frac{r}{n}\right)$$

Reemplazamos x^2

$$V_k = \pi \left(2rk \left(\frac{r}{n}\right) - k^2 \left(\frac{r}{n}\right)^2 \right)\left(\frac{r}{n}\right)$$

Luego continuamos,

$$V_k = \pi \left(2rk \left(\frac{r}{n}\right) - k^2 \left(\frac{r}{n}\right)^2 \right)\left(\frac{r}{n}\right)$$

$$V_k = \left(\frac{2\pi r^2}{n} k - \frac{\pi r^2}{n^2} k^2 \right)\left(\frac{r}{n}\right)$$

$$V_k = \frac{2r^3}{n^2} k - \frac{\pi r^3}{n^3} k^2$$

Recordemos que k es un disco cualquiera de la semiesfera, por lo que para calcular el volumen del cuerpo entero debemos reemplazar:

$$V_E = \frac{2\pi r^3}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} i - \frac{\pi r^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

$$V_{SE} = \frac{2\pi r^3}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} - \frac{\pi r^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$V_{SE} = \frac{\pi r^3}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{\pi r^3}{n^3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{6}$$

Pero, como el número de discos (n) tiende a infinito:

$$V_{SE} = \pi r^3 - \pi r^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$V_{SE} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$V_{SE} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Y, como paso final, duplicamos para obtener el volumen final de la esfera

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Sin duda una forma interesante de llegar al volumen de una esfera.

3.2 DEMOSTRACIÓN VOLUMEN ÓPTIMO

Volviendo al punto de vista económico, una de las claves para minimizar los costos de la elaboración productos es intentar conseguir el mayor tamaño posible si tener que aumentar el gasto de material. Esto se puede lograr modificando la forma del producto. En los siguientes cálculos demostraremos a que cifra asciende el volumen de 5 diferentes tipos de cuerpos geométricos, si establecemos que el área superficial de cada uno debe equivaler a 48 cm²

3.2.1 Cubo

$$A_{Cubo} = 6a^2$$

$$48 = 6 \cdot a^2$$

$$8 = a^2$$

$$\sqrt{8} = a$$

$$V_{Cubo} = a^3$$

$$V_{Cubo} = (\sqrt{8})^3$$

$$V_{Cubo} \approx 22{,}62\ cm^3$$

3.2.2 Cilindro

Estableciendo que la altura equivale al doble del radio

$$A_{Cilindro} = 2\pi r(h + r)$$

$$48 = 2\pi r(3r)$$

$$48 = 6\pi r^2$$

$$\frac{8}{\pi} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{8}{\pi}} = r$$

$$V_{Cilindro} = \pi r^2 h$$

$$V_{Cilindro} = \pi \cdot \frac{8}{\pi} \cdot 2(\sqrt{\frac{8}{\pi}})$$

$$V_{Cilindro} = 16(\sqrt{\frac{8}{\pi}})$$

$$V_{Cilindro} \approx 25.53\ cm^3$$

3.2.3 Pirámide

Estableciendo que las caras son triángulos equilátero y la base es cuadrada

$$A_{Pirámide} = a^2 + 4\ (\frac{a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}{2})$$

$$48 = a^2 + 2\ (\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2})$$

$$48 = a^2 + \sqrt{3}a^2$$

$$48 = a^2(1 + \sqrt{3})$$

$$\frac{48}{(1 + \sqrt{3})} = a^2$$

$$\sqrt{\frac{48}{(1 + \sqrt{3})}} = a$$

$$a \approx 4.19\ cm^2$$

$$V_{Pirámide} = \frac{lado^2 h}{3}$$

$$V_{Pirámide} = \frac{4.19 \cdot (\frac{4.19}{2}\sqrt{3})}{3}$$

$$V_{Pirámide} = 21.24\ cm^3$$

3.2.4 Cono

Estableciendo que la altura equivale al doble del radio

$$A_{Cono} = \pi r((\sqrt{r^2 + h^2}) + r)$$

$$48 = \pi \cdot r \cdot (\sqrt{r^2 + (2r)^2} + r)$$

$$\frac{48}{\pi} = r \cdot (\sqrt{r^2 + 4r^2} + r)$$

$$\frac{48}{\pi} = r \cdot (r\sqrt{5} + r)$$

$$\frac{48}{\pi} = r^2 \cdot (\sqrt{5} + 1)$$

$$\frac{48}{\pi} \cdot \frac{1}{(\sqrt{5} + 1)} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{48}{\pi} \cdot \frac{1}{(\sqrt{5} + 1)}} = r$$

$$2.17 \approx r$$

$$V_{Cono} = \frac{h\pi r^2}{3}$$

$$V_{Cono} = \frac{2(2.17) \cdot \pi \cdot (2.17)^2}{3}$$

$$V_{Cono} \approx 21.40\ cm^3$$

3.2.5 Esfera

$$A_{Esfera} = 4\pi r^2$$

$$48 = 4\pi r^2$$

$$12 = \pi r^2$$

$$\frac{12}{\pi} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{12}{\pi}} = r$$

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi \sqrt{\frac{12}{\pi}}^{3}$$

$$V_{Esfera} \approx 31.27\ cm^3$$

Con estos resultados queda comprobado que la esfera es el cuerpo que mas volumen contiene en relación a su área.

3.3 BUSQUEDA DE ESPACIO ÓPTIMO

Ahora que sabemos que efectivamente la esfera posee el volumen óptimo y que, por ello, es más efectivo fabricar productos esféricos, debemos pensar en el envase o recipiente que contenga a la esfera, en este caso, de 2cm de radio. Esto nos puede recordar la clásica conjetura de Kepler sobre apilar y acomodar esferas, que intenta exponer cuál sería la manera más eficaz de juntar esferas del mismo. Sin embargo, al contrario de la incógnita postulada por el alemán, esta vez, no nos enfocaremos en las esferas en sí, sino en buscar el cuerpo contenedor de esferas más efectivo, dígase el que deje menos espacios vacíos.

Antes de continuar, es necesario hacer una diferenciación entre Volumen y Capacidad. Mientras el Volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo, y se expresa en metros cúbicos y sus derivados(cm^3,dm^3,mm^3,...), la capacidad es el volumen que un cuerpo es capaz de contener, y se mide en litros y sus derivados (centilitro, mililitro,...)

Si bien el recipiente que menos espacio deje sería otra esfera de las mismas dimensiones, el hecho de fabricar un recipiente perfectamente esférico, del mismo tamaño en el que quepa la esfera original saldría aún más caro, no solo por el material sino que porque el tiempo de producción sería más largo. Por ende intentaremos buscar otro modelo de recipiente, ya sea un cubo, un cilindro, un cono o una pirámide de base cuadrada.

3.3.1 Esfera

Rápidamente procedemos a calcular

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{32}{3}\pi\ cm^3$$

$$V \approx 33.51\ cm^3$$

3.3.2 Cubo

Considerando que la esfera tiene 4 cm de diámetro, un cubo de lado 4 cm será suficiente.

$$A_{Cubo} = 6lado^2$$

$$A_{Cubo} = 6 \cdot 4 \cdot 4$$

$$A_{Cubo} = 96\ cm^2$$

$$V_{Cubo} = lado^3$$

$$V_{Cubo} = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$V_{Cubo} = 64\ cm^3$$

3.3.3 Cilindro

Considerando que la esfera tiene 4 cm de diámetro, un cilindro de radio 2 cm y alto 4 cm será suficiente.

$$A_{Cilindro} = 2\pi r(h + r)$$

$$A_{Cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6$$

$$A_{Cilindro} = 24\pi$$

$$A_{Cilindro} \approx 75{,}3\ cm^2$$

$$V_{Cilindro} = \pi r^2 h$$

$$V_{Cilindro} = 16\pi$$

$$V_{Cilindro} \approx 50.27\ cm^3$$

3.3.2 Cono

Considerando que la esfera tiene 4 cm de diámetro, necesariamente el cono debe tener al menos 6 cm de diámetro y 7 cm altura, de modo que la esfera esté totalmente contenida en el cono

$$A_{Cono} = \pi r(s + r)$$

$$A_{Cono} = \pi \cdot 3 \cdot (\sqrt{58} + 3)$$

$$A_{Cono} \approx 100.05\ cm^2$$

$$V_{Cono} = \frac{h\pi r^2}{3}$$

$$V_{Cono} = 21\pi$$

$$V_{Cono} \approx 65.97\ cm^3$$

3.3.5 Pirámide

Considerando que la esfera tiene 4 cm de diámetro, necesariamente la pirámide debe tener al menos 6 cm de lado base y 7 cm altura, de modo que la esfera esté totalmente contenida en la pirámide

$$A_{Pirámide} = Área\ basal + Área\ lateral$$

$$A_{Pirámide} = 36 + 4\left(\frac{6 \cdot \sqrt{58}}{2}\right)$$

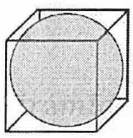
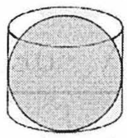
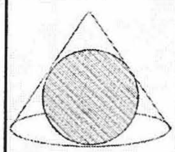
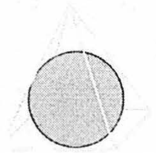
$$A_{Pirámide} \approx 127.39\ cm^2$$

$$V_{Pirámide} = \frac{lado^2 h}{3}$$

$$V_{Pirámide} = \frac{36 \cdot 7}{3}$$

$$V_{Pirámide} = 84\ cm^3$$

Tabla 1: Valores de Áreas Superficiales y Volúmenes de Cuerpos que contienen una esfera inscrita

	CUBO	CILINDRO	CONO	PIRÁMIDE
DIAGRAMA				
ÁREA SUP. CUERPO	96 cm^2	75.3 cm^2	100.05 cm^2	127.39 cm^2
VOLÚMEN CUERPO	64 cm^3	50.27 cm^3	65.97 cm^3	84 cm^3
ESPACIO LIBRE	30.49 cm^3	16.76 cm^3	32.46 cm^3	50.49 cm^3
PORCENTAJE V. OCUPADO	52,36%	66.66 %	50,79%	39,89%
PORCENTAJE V. NO OCUPADO	47.64 %	33.33 %	49.21 %	60.11%

4. CONCLUSIÓN:

A vista cierta podemos comprobar con los resultados que el cilindro es en definitiva el cuerpo que puede contener una esfera de manera más eficiente. ¿Sería esta entonces la forma más eficaz para fabricas productos? Cabe mencionar que este trabajo sólo contempló las variables geométricas dentro de la elaboración de objetos, descartando el tiempo de trabajo que cuesta en construir una esfera perfecta que, si bien la tecnología de hoy en día nos facilita tareas como esas, precisa mucha más atención que el fabricar prismas o cilindros.

Saliéndonos del plano económico es importante resaltar la importancia de la esfera, puesto que vivimos en una, bueno, casi. La esfera representa el triunfo del hombre por sobre la naturaleza, que nos ofrece principalmente objetos amorfos, o bien cuerpos que, en contraposición con la perfección de una esfera elaborada por una persona, son bastante simples. Son muy pocos los ejemplos de esferas naturales; en su mayoría éllas fueron introducidas por nosotros, y debemos aprovechar esto de la mejor manera posible y una de las formas de hacerlo es precisamente fabricando productos esféricos.

La reducción de costos podría ser notoria si empezamos a aplicar esto de forma masiva, lo que podría traer consecuencias, desde el aumento de salarios hasta la creación de miles de empleos, lo cual nos deja la duda, ¿Podrá ser la esfera la solución a los problemas económicos que afectan al mundo?

6. BIBLIOGRAFÍA

Baldor, A. (2004). Geometria Plana y del Espacio y Trigonometria. México: Publicaciones Cultural

Larousse. (2006). Diccionario escencial Matemáticas. México: Ediciones Larrouse.

Simmons, G. F. (2003). Precalculus Mathematics in a Nutshell: Geometry, Algebra, Trigonometry. Oregon: Wipf & Stock Publishers.

http://www.ditutor.com/geometria_espacio/area_cono.html

http://www.inetor.com/definidas/integral_volumen.html

http://www.profesorenlinea.cl/primysgdo/educacionmatematica/espacioygeometria/cuerposgeometricos/esfera.html

http://www.vitutor.com/geo/esp/f_7.html

http://www.vitutor.com/geo/esp/v_7.html

http://es.wikipedia.org/wiki/Esfera