

## Informes generales de la asignatura, noviembre de 2014

### MATEMÁTICAS NM

#### Bandas de calificación de la asignatura

##### Nivel Medio

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Rango de puntuaciones:</b>	0 - 17	18 - 36	37 - 49	50 - 61	62 - 73	74 - 85	86 - 100

#### Evaluación interna

##### Bandas de calificación del componente

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Rango de puntuaciones:</b>	0 - 2	3 - 5	6 - 8	9 - 11	12 - 14	15 - 17	18 - 20

#### Ámbito y adecuación del trabajo entregado

Se entregaron un amplio abanico de temas adecuados e interesantes, aunque de muy diversa calidad. Esto hizo que el rango de notas otorgadas estuviera fuera muy amplio también: entre 1 y 20 puntos. Aquellas exploraciones que resultaban apropiadas solían contener objetivos más originales y generalmente tenían una relevancia personal patente y estaban centrados en temas de interés personal para el alumno. Muchos alumnos siguen entregando exploraciones con preguntas de investigación que son similares a los problemas que aparecen en los libros de texto o que son demasiado poco concretas y específicas como para poder abordarlas adecuadamente en 10 o 12 páginas. Por ejemplo, todavía hubo mucho intentos de acometer temas tales como la Razón Áurea, el Problema de Monty Hall, el Triángulo de Pascal, el Problema del Apretón de Manos y el Copo de Nieve de Koch. Estos alumnos, por lo general, elaboraron un trabajo que era un simple resumen de hechos ya conocidos y/o una historia general del tema tratado. También hubo muchos alumnos que elaboraron un trabajo que estaba redactado como si fuera un ejemplo o una explicación sacada de un libro de texto. Por ejemplo, en el tema del Copo de Nieve de Koch, el trabajo de los alumnos imitaba a la antigua Tarea del IB, sin ningún tipo de personalización o de ampliación. En ambos casos los alumnos, por lo general, no lograron muy buenas notas.

Fue muy habitual el uso de medios tecnológicos para obtener funciones de regresión que permitieran la modelización de los datos. Algunos colegios incluyeron muestras que eran **todas ellas** tareas de modelización y que, por lo general, imitaban el estilo de las antiguas carpetas. A pesar de que estas tareas no tienen nada de malo en sí mismas, sería decepcionante que los alumnos se sintieran limitados a este tipo de tareas o que se sintieran dirigidos explícitamente por el profesor a abordar únicamente este tipo de tareas. En algunos casos estas tareas se plantearon de manera eficaz, con el respaldo matemático adecuado. Sin embargo, también hubo casos en los que el alumno se limitó a crear y a aplicar el modelo de regresión con ayuda de medios tecnológicos, demostrando así tener un grado de comprensión muy limitado. Esperamos que en futuros trabajos los alumnos sean capaces de justificar el porqué de su elección de modelo de regresión y de reflexionar de manera crítica sobre dicha elección.

Por lo general, los alumnos siguieron al pie de la letra la sugerencia de que la exploración tuviera entre 6 y 12 páginas. Sin embargo, también hubo muchas que fueron muy largas. A menudo, este hecho jugó en contra del alumno y le perjudicó.

## Desempeño de los alumnos en cada criterio

### Criterio A

La mayoría de los alumnos obtuvieron una buena puntuación en este criterio. La mayoría de los trabajos estaban bien organizados y estaban presentados de manera sistemática. Incluyeron algún tipo de introducción, trataron de plantear un objetivo general, hicieron un esfuerzo deliberado por organizar el trabajo y añadieron al final una conclusión. Aquellos alumnos que obtuvieron un mal resultado en este criterio por lo general no plantearon un objetivo bien concreto y definido y, por consiguiente, no fueron capaces de elaborar un trabajo con un desarrollo coherente. Asimismo, algunos alumnos dieron razones especialmente artificiosas o simplemente indicaron que el tema les había parecido «interesante», que es insuficiente como motivación para elegir un tema. Hubo bastantes alumnos que aportaron un montón de páginas llenas de cálculos repetitivos, lo que afectó negativamente a la concisión y al buen fluir del trabajo. Los alumnos deberían incluir únicamente uno o dos cálculos de muestra en el cuerpo del trabajo; el resto de cálculos parecidos se han de resumir en una tabla. La coherencia fue buena, por lo general, pero en ocasiones el trabajo no se leía con fluidez porque faltaban explicaciones y porque los distintos subapartados no estaban bien enlazados unos con otros.

### Criterio B

La presentación fue buena, por lo general. Muchos alumnos habían hecho un esfuerzo deliberado por presentar su trabajo adecuadamente e incluyendo diversas formas de presentación matemática. Utilizaron un editor de ecuaciones u otro software de matemáticas para escribir correctamente las expresiones matemáticas. El uso de los diagramas apropiados con unos rótulos claros a menudo les supuso un problema. Quizá sea que las tablas y los gráficos son más fáciles de crear con el computador, mientras que los diagramas requieren un mayor esfuerzo. Muchos gráficos y diagramas estaban cortados y copiados de alguna fuente de Internet, y con frecuencia se incluyeron en el trabajo sin que hubiera un

propósito o una justificación real. Los gráficos tienen que tener un fin; no basta con incluirlos solo para «utilizar diversas formas de representación matemática». Con frecuencia, las fórmulas y teoremas matemáticos tomados directamente de Internet se incluyeron sin que aportaran nada adicional al trabajo del alumno.

### Criterio C

Muchos alumnos se esforzaron por hacer suyo el trabajo llevando a cabo su propia investigación, recabando sus propios datos y dando razones personales convincentes de por qué habían elegido ese tema. Por otro lado, hubo también bastantes alumnos que no hicieron suya la exploración y que se limitaron a hacer un trabajo descriptivo. Aquellos alumnos que utilizaron problemas de libros de texto y que fundamentalmente se dedicaron a cortar y pegar información proveniente de fuentes de dominio público, por lo general obtuvieron una mala nota en este criterio. Del mismo modo, todavía hubo un buen número de profesores que concedieron una puntuación elevada al alumno simplemente por comentar cuánto le había gustado el tema o por mostrar entusiasmo, incluso aunque no hubiera habido en el trabajo ningún indicio de buen compromiso personal. Es importante tener presente que este criterio no se puede utilizar para penalizar un retraso en la entrega del trabajo.

### Criterio D

Muchos alumnos fueron capaces de hacer algunas reflexiones y trataron de que fueran coherentes y con sentido. Al menos se plantearon cuál era la pertinencia de los procedimientos matemáticos que estaban utilizando o investigando. Lamentablemente, solo unos pocos fueron capaces de hacer reflexiones críticas y enjundiosas a lo largo de toda su exploración. Sin embargo, esto no impidió que algunos profesores concedieran la puntuación máxima a trabajos de alumnos que se limitaban a resumir los resultados.

### Criterio E

Hubo un amplio abanico de procedimientos matemáticos utilizados en las exploraciones y un amplio rango de niveles de comprensión. La mayoría de los alumnos fueron capaces de elaborar exploraciones que eran acordes con el programa de estudios de Matemáticas NM y que resultaban pertinentes para las tareas abordadas. Sin embargo, en muchos de esos casos no fueron capaces de demostrar que habían entendido bien los conceptos utilizados. Por ejemplo, los procedimientos matemáticos parecían tomados de un libro de texto o de Internet y utilizados mecánicamente, sin que resultaran verdaderamente pertinentes para la cuestión que tenían entre manos. Es necesario alentar a los alumnos a que apliquen estos procedimientos a su propio trabajo. Solo unos pocos alumnos se retaron a sí mismos saliéndose del programa de estudios de Matemáticas NM. La tasa de éxito de estos intentos varió bastante de unos casos a otros.

Los alumnos y los profesores tienen que tener presente que el mero hecho de mostrar la respuesta correcta no implica que haya habido una comprensión; hay que demostrarlo.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

Los profesores tienen que asegurarse de estar familiarizados con toda la información pertinente que aparece en la guía y en el material de ayuda al profesor, especialmente las responsabilidades del profesorado que ahí se incluyen. En particular hay que tener presentes los siguientes puntos.

- Los profesores tienen que ver con los alumnos algunos de los ejemplos incluidos en el material de ayuda al profesor y tienen que corregirlos y puntuarlos delante de ellos, para que así los alumnos entiendan mejor cuáles son las expectativas que se tienen en cada criterio.
- Los profesores deberían alentar la originalidad en los trabajos, especialmente la idea de «hacer suyo el trabajo». Deberían enfatizar la idea de aplicar a su propio trabajo los procedimientos matemáticos que los alumnos han descubierto.
- Se les debería aconsejar a los alumnos que citen en el cuerpo del trabajo todos los recursos empleados, incluidas las imágenes y los datos que se hayan utilizado. No basta con incluir una bibliografía, puesto que eso no informa al lector de cómo y en qué lugar de la exploración se han utilizado dichos recursos.
- A los alumnos se les debería orientar para que elaboren exploraciones que tengan un objetivo general concreto y bien definido y que contenga pruebas que corroboren su compromiso personal.
- Los profesores tienen que seguir los procedimientos sugeridos que se incluyen en el material de ayuda al profesor, en los que se especifica que los alumnos pueden entregar un primer borrador. De este modo los profesores pueden evaluar si el tema resulta o no apropiado, verificar la organización general del trabajo y su coherencia, comprobar mediante una prueba oral los conocimientos de matemáticas del alumno y, más importante aún, asegurarse de que el trabajo lo esté elaborando el alumno y no sea una mera repetición mecánica de lo que aparece en Wolfram, en Wikipedia o en otros sitios web.
- A los colegios se les desaconseja encarecidamente que obliguen a realizar un tipo de exploración concreta. Por el contrario, los alumnos deberían tener la libertad de explorar el campo que ellos elijan, siempre que les lleve a una exploración aceptable.
- Resulta sumamente útil para el proceso de moderación que los profesores escriban sus anotaciones y comentarios en el propio trabajo del alumno y que también los incluyan en el formulario 5/EXCS. Los profesores han de indicar que han verificado todos los procedimientos matemáticos y que han tomado nota de si eran o no correctos.
- En aquellos casos en los que haya más de un profesor, es esencial que se lleve a cabo una estandarización interna entre profesores.

## Nivel Medio – Prueba 1

### Bandas de calificación del componente

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Rango de puntuaciones:</b>	0 - 17	18 - 35	36 - 46	47 - 56	57 - 66	67 - 76	77 - 90

### Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Integración mediante sustitución y/o comparación
- Valor esperado en un juego limpio (sin trampas)
- Bosquejo de funciones, incluyendo las características más importantes del gráfico
- Razones trigonométricas de ángulos obtusos
- Probabilidad condicionada y binomial
- Aplicar las propiedades de los logaritmos
- Vectores y ecuación vectorial de una recta

### Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

- Aplicar las fórmulas del término  $n$ -ésimo y de la suma de los términos de una progresión aritmética
- Suma de una distribución de probabilidad
- Integración y derivación de funciones polinómicas
- Resolución de ecuaciones cuadráticas
- Probabilidad simple y diagramas de árbol

### Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas

#### Pregunta 1: Funciones cuadráticas

Casi todos los alumnos resolvieron bastante bien los apartados (a) y (b) de esta pregunta, viéndose solo unos pocos errores en (b) a la hora de descomponer en factores. En el apartado (c), a pesar de que la mayoría de los alumnos estaban familiarizados con la forma parabólica general del gráfico, muchos colocaron el vértice en la intersección con el eje  $y$  (0, -6) y hubo muy pocos que tuvieran en cuenta cuáles eran los extremos de la función dentro del dominio dado.

## Pregunta 2: Progresiones aritméticas

Los alumnos respondieron muy acertadamente a los tres apartados de esta pregunta. Los errores aislados que se vieron fueron, por lo general, errores aritméticos que se produjeron una vez que los alumnos habían sustituido correctamente los valores en las fórmulas del cuadernillo de fórmulas.

## Pregunta 3: Distribución de probabilidad y juego limpio (sin trampas)

La gran mayoría de alumnos resolvieron correctamente el apartado (a) de la pregunta sumando las probabilidades y calculando la diferencia hasta 1. Sin embargo, el apartado (b) no lo resolvieron tan bien como el anterior. Muchos alumnos parecían no estar familiarizados con el concepto de «juego limpio (sin trampas)», a pesar de que este tema está incluido en el programa de estudios. El error más frecuente en el apartado (b), fue decir que  $E(X) = 1$  en lugar de  $E(X) = 0$ .

## Pregunta 4: Propiedades de los logaritmos

El apartado (a) lo resolvió correctamente un gran número de alumnos, a pesar de que hubo bastantes que no aplicaron las reglas de los logaritmos en el orden correcto. En el apartado (b), muchos alumnos sabían que tenían que coger la respuesta del apartado (a) e igualarla a  $-\ln x$ , pero un buen número de ellos dijeron incorrectamente que  $\ln 2 = -\ln x$  implicaba que  $2 = -x$ .

## Pregunta 5: Funciones racionales

Los apartados (a) y (b) por lo general bien los resolvieron bien. Algunos alumnos respondieron en el apartado (a)  $q = -3$ , que es incorrecto, en lugar de  $q = 3$ , pero luego pudieron conseguir puntos por arrastre de error en el apartado (b). Muchos alumnos no se dieron cuenta de la conexión que había entre los apartados (b) y (c) de esta pregunta, y muchos hicieron un montón de trabajo innecesario en el apartado (c) para poder llegar hasta la respuesta correcta. En el apartado (c) hubo muchos alumnos que no escribieron la ecuación de la asíntota, sino que se limitaron a escribir el número.

## Pregunta 6: Integración y área bajo una curva

Muy pocos alumnos consiguieron la máxima puntuación en esta pregunta. Aunque la mayoría sabían integrar, muchos parecían no estar familiarizados con la integración mediante sustitución o comparación. A pesar de que este tema forma parte del programa de estudios, no hubo muchos alumnos a los que se les ocurriera utilizar el método de sustitución. Un gran número de ellos trataron de integrar por separado los términos individuales del numerador y del denominador, como si se tratara de una función polinómica. A pesar de que hubo algunos alumnos que sabían que la integral incluiría una función con logaritmos neperianos (naturales) y sustituyeron 4 y 0 en su función, muchos acabaron teniendo valores indefinidos como  $\ln 0$  o no supieron qué hacer con expresiones que contenían  $\ln 1$ .

### Pregunta 7: Vectores y trigonometría

La gran mayoría de alumnos supieron hallar la expresión correcta para  $\cos \hat{C}AB$ , pero muy pocos se dieron cuenta de que un ángulo con coseno negativo ha de ser obtuso (en lugar de agudo), con lo que muchos afirmaron que  $\hat{C}AB = 30^\circ$ . A la hora de meter los valores en la fórmula del área de un triángulo, un error habitual fue sustituir  $5\sqrt{3}$  en lugar de 10, dado que muchos no parecían comprender la relación que existe entre el módulo de un vector y la longitud de un segmento de recta en la fórmula del triángulo.

Leyendo algunos de los comentarios incluidos en los formularios G2 que enviaron los colegios, parece que habría sido más fácil para los alumnos si esta pregunta se hubiera dividido en dos apartados. A la vez que tratamos de ofrecer más apoyo en las preguntas iniciales del examen, las preguntas 6 y 7 suelen incluir pocos o ningún andamiaje. En estas últimas preguntas los alumnos normalmente tienen que utilizar conocimientos de distintas áreas del programa de estudios en una misma pregunta.

### Pregunta 8: Probabilidad

Casi todos los alumnos resolvieron correctamente los apartados (a) y (b) de esta pregunta y la mayoría lograron también la máxima puntuación en el apartado (c). Lamentablemente hubo algunos alumnos que cometieron errores aritméticos a la hora de multiplicar o de sumar fracciones. Por otro lado, los alumnos no tuvieron tanto éxito a la hora de abordar los apartados (d) y (e) de esta pregunta. A pesar de que muchos sabían que para el apartado (d) era necesario recurrir a la probabilidad condicionada, muchos de ellos no supieron utilizar los valores obtenidos en los apartados (b) y (c) y decidieron partir de cero, haciendo cálculos nuevos (y a menudo incorrectos) para el numerador y el denominador. La mayoría de los alumnos no se dieron cuenta de que para el apartado (e) había que usar probabilidad binomial, y no se percataron de que hay tres maneras de que Antonio (Adam en la versión inglesa) «llegue tarde al colegio exactamente una vez». Una solución muy habitual (además

de incorrecta) en el apartado (e) fue  $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$ .

### Pregunta 9: Análisis y transformación de funciones polinómicas

La mayoría de los alumnos abordaron correctamente el apartado (a) y también la mayoría se dieron cuenta de que solo había una solución posible dentro del dominio dado. Casi todos los alumnos resolvieron correctamente el apartado (b), obteniendo todos los puntos posibles por integrar el polinomio y resolver para C. Sin embargo, el apartado (c) les resultó mucho más difícil a los alumnos, quienes o bien no sabían cómo aplicar correctamente las transformaciones o se liaron con largas e innecesarias manipulaciones de la función, en vez de simplemente hallar la imagen del mínimo local A.

### Pregunta 10: Ecuación vectorial de una recta y análisis

En el apartado (a), la mayoría de los alumnos sustituyeron correctamente 1 por x, aunque muchos de ellos no lograron la máxima puntuación en este apartado por haber escrito la ecuación vectorial utilizando  $L_1 =$ , sin entender que  $L_1$  es el nombre de la recta y no de un

vector. Muy pocos alumnos resolvieron correctamente los apartados (b) y (c), y con frecuencia se pusieron a trabajar «hacia atrás», partiendo de la respuesta dada, lo que no resulta apropiado en preguntas de tipo «Muestre que». En este tipo de preguntas los alumnos tienen que mostrar claramente el desarrollo del ejercicio (cálculos) y el razonamiento aplicado, lo que cabe esperar que les lleve a la respuesta dada. Afortunadamente hubo un buen número de alumnos que se dieron cuenta de que en el apartado (d) había que hallar la derivada de la expresión para  $d$  del enunciado, con lo que pudieron conseguir al menos una parte de los puntos disponibles en este último apartado.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

Los alumnos deberían practicar el trabajar con distintos tipos de funciones y el dibujar aproximadamente esas funciones. Deberían ser capaces de identificar las características más importantes de un gráfico (uno del enunciado o uno elaborado por el alumno), como son las asíntotas, el dominio y el recorrido, los máximos y mínimos locales, las intersecciones (cortes) con los ejes. Los alumnos también deberían practicar a resolver preguntas de tipo «Muestre que», en las que muestren claramente todo el desarrollo del ejercicio (es decir, los cálculos realizados). Los alumnos deberían darse cuenta de que la respuesta dada en un apartado dado de una pregunta puede resultar útil para resolver los apartados subsiguientes de esa pregunta, especialmente en la Sección B de la prueba.

Los profesores pueden ayudar muchísimo a sus alumnos conociendo bien todos los componentes del nuevo programa de estudios de Matemáticas NM (primeros exámenes en los que se aplicó: los de 2014). Hay algunos temas, como el valor esperado en un juego limpio (sin trampas) o la integración mediante sustitución, que parece que se han ignorado en muchos colegios. Además de eso, los vectores es un tema que, aunque no es nuevo, parece que plantea dificultades a muchos alumnos año tras año. Los profesores deberían ayudar a sus alumnos a entender la geometría que se esconde tras los vectores, en vez de tratar conceptos como el módulo y la ecuación vectorial de una recta como meras fórmulas que hay que aprenderse de memoria.

Los profesores también necesitan estar familiarizados con otros aspectos de la guía de Matemáticas NM, incluida a lista con la notación empleada y los términos de instrucción, y han de hacer partícipes a sus alumnos de esta información. Por ejemplo, el término de instrucción «Dibuje aproximadamente» aunque no requiere que se dibuje a la perfección el gráfico de una función, si que hace necesario que se muestren las características más relevantes del gráfico. Con respecto a la lista con la notación empleada, queda patente a partir de los comentarios que nos han hecho llegar los colegios en el formulario G2 que muchos desconocían que la notación  $PQ$  utilizada en la pregunta 10 se refería a la longitud de un segmento de recta. En muchos de los comentarios incluidos en el formulario G2 se nos recomienda que en vez de utilizar la notación  $PQ^2$ , que en esta pregunta se debería haber utilizado la notación  $(PQ)^2$ . La notación  $(PQ)$  representa una recta y, por lo tanto, es una figura geométrica y no un valor numérico que se pueda elevar al cuadrado. Los símbolos que aparecen en la lista de notación empleada se utilizarán en los exámenes sin ninguna explicación adicional y los alumnos se espera que estén familiarizados con dichos símbolos.



Para terminar, los profesores y los alumnos tienen que tener presente que los exámenes con las respuestas de los alumnos primero se escanean y luego los examinadores los corrigen y los puntúan tras haberse descargado esas imágenes escaneadas en su ordenador. Los profesores tienen que decirles a sus alumnos que cuando se escanean los exámenes con sus respuestas todo lo que ellos han escrito pasa a estar en blanco y negro. Comentarios habituales de los alumnos del tipo «mira la línea azul, no la negra» no les son de ninguna ayuda a los examinadores, dado que en un examen escaneado todas las líneas son negras. Los alumnos tienen que comprobar que sus respuestas estén escritas con claridad y que no hayan escrito ningún símbolo sobre la línea de puntos de la zona de respuesta, pues con frecuencia cuesta distinguir los signos menos de los signos igual, por ejemplo. El texto que está borrado levemente o que no está del todo borrado aparece en la hoja escaneada como texto en negro intenso, por lo que se recuerda a los alumnos que es mejor que tachen aquellos cálculos o partes del desarrollo que no quieran que los examinadores tengan en cuenta.

## Nivel Medio - Prueba dos

### Bandas de calificación del componente

<b>Calificación final:</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Rango de puntuaciones:</b>	0 - 17	18 - 35	36 - 46	47 - 57	58 - 67	68 - 78	79 - 90

### Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Bosquejo en el papel de gráficos hechos con la calculadora de pantalla gráfica.
- Volumen de un sólido de revolución
- Hallar probabilidades a partir de tablas de valores, particularmente si son probabilidades condicionadas.
- Investigar situaciones poco o nada familiares, como en la progresión de la pregunta 9
- Resolver gráficamente ecuaciones y desigualdades
- Trabajo con índices
- La terminología «variable tipificada o estandarizada»
- Interpretar/razonar basándose y apoyándose en resultados matemáticos

### Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

- Funciones compuestas
- Utilizar la calculadora de pantalla gráfica para hallar y para utilizar la ecuación de la recta de regresión
- Geometría del círculo: Arcos y sectores circulares
- Usar el teorema del seno y el teorema del coseno
- Geometría de las transformaciones

- Gráficos de frecuencias acumuladas
- Distribución normal

Esta prueba resultó bastante asequible y la mayoría de los alumnos fueron capaces de acabarla en el tiempo asignado. En su conjunto parece que ha habido una mejora en el grado de preparación que tienen los alumnos para abordar este tipo de pruebas, lo que demuestra una mejora de la enseñanza y el aprendizaje en las aulas de Matemáticas NM.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas

### Pregunta 1: Composición de funciones

Por lo general la resolvieron bien, aunque hubo algunos errores banales fruto del descuido al sustituir la expresión de  $f$  en el apartado (a) y al reordenar la ecuación en el apartado (b). A pesar de que los alumnos tenían claro que se suponía que tenían que resolver la ecuación

$2x^3 + 3 = 0$ , muchos escribieron  $2x^3 = 3$  o  $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ . La mayoría de los alumnos optaron por un método algebraico en vez de utilizar la calculadora de pantalla gráfica.

### Pregunta 2: Regresión lineal

La mayoría de los alumnos resolvieron correctamente los apartados (b) y (c) de esta pregunta.

Sin embargo, unos pocos alumnos no se dieron cuenta de que esta pregunta giraba en torno a la regresión lineal. De entre aquellos que sí se dieron cuenta, no todos sabían lo que era el coeficiente de correlación. Hubo algunos que dejaron en blanco este apartado de la pregunta, mientras que otros escribieron el valor de  $r^2$ .

Algunos alumnos trataron de hallar el valor de  $a$  y  $b$  formando dos ecuaciones lineales a partir de dos puntos de la tabla y resolviéndolas.

### Pregunta 3: Geometría del círculo: arcos y sectores circulares

Los apartados (a) y (b) los resolvieron bien, pero no fue inusual encontrarse con alumnos que en el apartado (c) hallaron el área en vez del perímetro. La mayoría de los alumnos se dieron cuenta de que había que utilizar el teorema del coseno en el apartado (b), y luego hubo otros que optaron por utilizar el teorema del seno para hallar la longitud de AB.

Hay alumnos que no se sienten cómodos trabajando con radianes y que convierten todos los ángulos a grados. Otros alumnos utilizaron un ángulo de  $1.2\pi$  en vez de 1,2, suponiendo al parecer que los ángulos en radianes siempre han de tener una  $\pi$ .

### Pregunta 4: Gráfico de una función, ceros y volumen de revolución

A pesar de ser una pregunta sencilla, y aunque la mayoría de los alumnos dibujaron un gráfico con una forma aproximadamente correcta, los bosquejos o bien tenían mal la escala o

les faltaba uno de los extremos del gráfico. En el apartado (b) hubo unos pocos alumnos que no dieron las dos respuestas, a pesar de que luego prosiguieron y utilizaron 1,84 en el apartado (c).

El apartado (c) les resultó difícil a la mayoría de los alumnos, puesto que solo unos pocos fueron capaces de escribir correctamente la expresión para el volumen: algunos incluyeron los límites correctos pero no elevaron al cuadrado la función, mientras que otros elevaron al cuadrado la función pero no escribieron los límites correctos en la integral. Hubo mucho que no hallaron el volumen, o que hallaron uno que era incorrecto. Entre estos últimos están aquellos que calcularon la integral entre 0 y 2 o quienes dividieron la región en tres partes, demostrando no entender el concepto de región «delimitada».

### Pregunta 5: Gráficos de funciones trigonométricas

Muchos alumnos hallaron correctamente la amplitud y el desplazamiento vertical, pero muy pocos supieron hallar el valor correcto del período y, por consiguiente, el valor de  $q$  en el apartado (c). Algunos alumnos sustituyeron las coordenadas de un punto en la función, pero luego no fueron capaces de escribir una ecuación en función de  $q$  que fuera correcta. Muchos de los alumnos que hallaron la respuesta correcta no mostraron un desarrollo del ejercicio lo suficientemente detallado como para lograr los tres puntos que había en juego. Las tablas de evaluación recalcan la necesidad de mostrar el desarrollo del ejercicio.

### Pregunta 6 Desarrollo de la potencia de un binomio

Los alumnos, por lo general, o contestaron muy bien o contestaron muy deficientemente a esta pregunta. A algunos les costaba entender lo que era el término constante, mientras que otros fueron incapaces de hallar el valor de  $r$  que era compatible con el término constante dado. Se vieron muchos errores algebraicos en el cálculo del término; la mayoría se debieron

a que olvidaron elevar al cuadrado  $\frac{1}{2}$ . Algunos no incluyeron el valor negativo como posible solución para  $p$ , a pesar de que en la pregunta se les pedía que dieran «los valores» (en plural) de  $p$ .

### Pregunta 7: Velocidad, desplazamiento y distancia

En el apartado (a) un gran número de alumnos eligió la fórmula correcta para hallar la distancia, pero luego muchos obtuvieron un valor incorrecto. Un número considerable de

alumnos leyó mal la función y pensó que era  $v(t) = e^{\frac{1}{2}\cos t}$ , lo que les hizo perder un punto en este apartado.

Solo unos pocos alumnos lograron la máxima puntuación en el apartado (b). A pesar de que muchos mencionaron el cambio de dirección, muy pocos sustentaron su respuesta con un cálculo de la distancia recorrida a la vuelta o con un cálculo del desplazamiento, demostrando así que no entienden bien el término de instrucción «Explique».

El carácter periódico de la función confundió a muchos alumnos, quienes utilizaron este hecho para asegurar que la partícula pasaría de nuevo por el punto A.

### Pregunta 8: Estadística y probabilidad

Esta pregunta la abordaron bien la mayoría de los alumnos. Excepto por errores de cálculo y errores de lectura al extraer datos del gráfico de frecuencias acumuladas, parece que la mayoría de los alumnos entendieron bien los procedimientos y los conceptos de la pregunta.

Algunos alumnos no obtuvieron la máxima puntuación en los apartados (b-ii) y (e) por no mostrar los procedimientos empleados. En el apartado (c), algunos alumnos escribieron cosas del tipo «usé la calculadora de pantalla gráfica» sin mostrar el pertinente desarrollo del ejercicio, lo que les hizo perder puntos. Aquellos que optaron por un enfoque basado en el uso de fórmulas (dii) por lo general no tuvieron tanto éxito como aquellos que enfocaron la pregunta partiendo de los valores de la tabla.

En el apartado (e) hubo un gran número de alumnos que fue incapaz de hallar la media. Algunos utilizaron valores centrales de los intervalos que eran incorrectos y otros ni siquiera se plantearon utilizarlos.

### Pregunta 9: Progresiones

La mayoría de los alumnos resolvieron correctamente el apartado (a). Un número sorprendentemente alto de alumnos supusieron que la segunda progresión también era geométrica, con lo que el apartado (b) a muchos les resultó confuso. Fue bastante habitual que los alumnos no mostraran claramente qué cálculos eran pertinentes para el apartado (i) y cuáles lo eran para el apartado (ii), lo que a menudo les hizo perder puntos. Hubo pocos alumnos que completaran correctamente el apartado (c), pues muchos lo intentaron resolver por métodos algebraicos en vez de gráficamente. Aquellos que utilizaron la tabla de valores no siempre mostraron dos conjuntos de valores y, como consecuencia de ello, perdieron puntos.

### Pregunta 10: Distribución normal

En esta pregunta los alumnos mostraron niveles muy diversos de capacidad. Aunque que la mayoría sabían calcular probabilidades, hubo muy pocos que realmente entendieran los conceptos que se esconden tras una distribución normal, incluida la respuesta a la pregunta a (a-i), que era bastante sencilla. Hubo un número bastante elevado de alumnos que no se dieron cuenta de que la instrucción era «Escriba», y dedicaron un tiempo considerable a tratar de hallar la respuesta 0,5 en (a-i) o el valor tipificado (estandarizado) en (b-i).

Hubo muchos alumnos que no entendieron la pregunta (b-i) y dieron o bien un valor de probabilidad como el valor  $z$  o hallaron el valor correcto más adelante, en el apartado (b-ii) en el cálculo de la desviación típica (sin reconocer su significación). A muchos de los que sí que entendieron estos conceptos, el contexto de la pregunta no les resultó especialmente complicado y hubo algunos alumnos que lograron responder correctamente a toda la pregunta.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

Los principales problemas que quedaron patentes con esta prueba fueron: el uso eficiente de la calculadora de pantalla gráfica, mostrar los cálculos y razonamientos pertinentes en cada ejercicio y la comprensión conceptual que sustenta la aplicación mecánica de reglas y fórmulas. Es fundamental que los alumnos tengan ocasión de mostrar claramente el desarrollo (cálculos y razonamientos) de sus ejercicios, de dar las razones que les llevan a hacer lo que hacen y cómo lo hacen y de aprender qué tiene que tener una explicación para ser aceptable y completa. Esto solo se puede lograr si se considera un aspecto relevante de la enseñanza.

Los profesores tienen que seguir haciendo hincapié en la importancia de incluir en todo momento el desarrollo del ejercicio (cálculos y razonamientos) y han de recordarles a los alumnos que no siempre se concede la máxima puntuación por una respuesta correcta que no esté acompañada del desarrollo del ejercicio. Por lo general, si un apartado de una pregunta vale más de 2 puntos se recomienda mostrar el procedimiento seguido para obtener la respuesta.

Los alumnos tienen que tener muy claro qué engloba el término «desarrollo del ejercicio» cuando estén leyendo una solución de una tabla de valores (cuántos conjuntos de resultados hay que mostrar, etc.)

Es importante seguir insistiendo a los alumnos sobre qué constituye un bosquejo «exacto» de una función que han representado gráficamente con la calculadora de pantalla gráfica.

Se les debe alentar a los alumnos a que den las respuestas sin redondear, antes de escribir la respuesta definitiva redondeando a 3 cifras significativas (cs). También hay que prevenirles de las consecuencias de dar respuestas redondeando a 1 cs o incluso a 2 cs (no fue raro ver redondeos erróneos a 2 cs sin rastro alguno de la respuesta sin redondear). Redondear antes de tiempo puede conducir a una respuesta incorrecta.

Es importante insistirles a los alumnos que han de rotular el desarrollo del ejercicio, indicando claramente a qué apartado de la pregunta corresponde. Muchos alumnos perdieron puntos por no quedar claro a qué apartado correspondía cada fragmento del desarrollo.

En la enseñanza de la cinemática hay que hacer hincapié en la comprensión y en la interpretación de los gráficos de velocidad/tiempo, desplazamiento/tiempo, etc., y en cómo se pueden aprovechar las funciones de representación gráfica de la calculadora de pantalla gráfica para mejorar esta comprensión.

Hubo un número considerable de alumnos que no se dieron cuenta de cuándo era necesario utilizar la calculadora de pantalla gráfica en vez de optar por una solución algebraica. Es fundamental dedicar tiempo en clase a elaborar criterios que les sirvan a los alumnos para saber cuándo han de optar por un enfoque analítico y cuando han de utilizar la calculadora. Como regla general, en la Prueba 2, se espera que utilicen un enfoque basado en el uso de la calculadora de pantalla gráfica.