

Informe general de la asignatura,  
mayo de 2013

## MATEMÁTICAS NM TZ2

(IB África, Europa y Oriente Medio y región Asia-Pacífico del IB)

### Bandas de calificación de la asignatura

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 18	19 - 36	37 - 50	51 - 61	62 - 73	74 - 84	85 - 100

### Variantes de los exámenes según la zona horaria

Para proteger la integridad de los exámenes, cada vez se están utilizando más variantes distintas de los exámenes según la zona horaria donde se realicen. Al recurrir a variantes del mismo examen, los alumnos ubicados en una parte del mundo no estarán respondiendo al mismo cuestionario de examen que los alumnos ubicados en otras partes del mundo. Se aplica un proceso muy riguroso para garantizar que las diversas variantes del examen sean comparables en lo que respecta a su dificultad y a la cobertura del programa de estudios, y se toman las medidas pertinentes para garantizar que se apliquen las mismas normas de calificación a todos los exámenes escritos de los alumnos, independientemente de cuál haya sido la versión del examen a la que hayan respondido. Para la convocatoria de exámenes de mayo de 2013 el IB ha elaborado variantes de los exámenes de Matemáticas NM para las distintas zonas horarias.

### Evaluación interna

#### Bandas de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 7	8 - 13	14 - 19	20 - 23	24 - 28	29 - 33	34 - 40

### Ámbito y adecuación del trabajo entregado

La inmensa mayoría de las muestras contenían tareas tomadas del conjunto diseñado por el IB. Con diferencia, las tareas más elegidas fueron la de «Fracciones de Lacsap» y la de «Altura que saltaron los ganadores de la medalla de oro». En unos pocos casos la tarea elegida la había diseñado el profesor, con tasas de éxito variables. Hubo colegios que enviaron tareas antiguas; a estas carpetas se les aplicó una penalización de 10 puntos. En un par de casos la escuela había cogido tareas

antiguas, había introducido cambios mínimos y luego las presentó como si fueran tareas nuevas. Los moderadores principales fueron los encargados de arbitrar en estos casos, y en aquellos en los que se consideró que los cambios introducidos no eran lo suficientemente significativos como para que la tarea nueva se diferenciara de la versión antigua también se aplicó una penalización de 10 puntos. El motivo por el cual las tareas tienen una «fecha de caducidad» es que las soluciones llegan muy rápidamente a Internet, por lo que si la tarea no se revisa y se modifica lo suficiente, las soluciones de la tarea original constituyen una ventaja para aquellos alumnos que escogen estas «tareas ligeramente modificadas».

## Desempeño de los alumnos con relación a cada criterio

### **Criterio A**

Una gran parte del trabajo se realizó de manera adecuada y coherente con lo pautado en este criterio. Sin embargo, a pesar de los muchos informes de la asignatura y notas adicionales que hay disponibles en el CPEL, en algunos trabajos se incluyó notación de computadores, o se utilizaron variables de manera incoherente, o se pasó por alto el uso del signo de «aproximadamente igual» para las estimaciones. En las tareas de Tipo II, algunos alumnos no distinguieron los «parámetros» de las «variables» y de las «restricciones». Los alumnos también tienen que ser conscientes de que, en las tareas de utilización de modelos matemáticos, para funciones distintas hay que emplear nombres distintos.

### **Criterio B**

En algunos casos la comunicación fue excelente, con figuras y gráficos claramente rotulados, y con explicaciones muy coherentes del análisis realizado y de los resultados obtenidos. Sin embargo, en otros casos, los resultados no estaban acompañados de suficientes explicaciones y los ejes no estaban rotulados o en los gráficos no se indicaba cuál había sido la escala utilizada. Muchos alumnos no fueron capaces de dibujar un diagrama de dispersión con los datos primarios, o crearon un gráfico continuo allí donde el dominio era discreto. El uso de un formato de «Preguntas y Respuestas» sigue siendo un problema. Las tareas de la carpeta no son tareas para realizar en casa y deberían tratarse como un ensayo matemático, no como una serie de preguntas y respuestas. Algunos alumnos incluyeron explicaciones detalladas o innecesarias de cómo habían utilizado los medios tecnológicos, o añadieron un trasfondo teórico que no potenciaba realmente la calidad de su trabajo.

### **Criterio C**

Tipo I:

Este criterio requiere que se generen y se organicen adecuadamente los datos antes de tratar de analizarlos. En determinadas tareas (especialmente la tarea de los Círculos) los alumnos empezaron por llevar a cabo un análisis y, a continuación, crearon datos a partir de su proposición general, o no presentaron ningún dato. Esta forma de proceder es contraria a la idea de elaborar una conjetura a partir de un patrón de conducta observado, y el resultado fue que las puntuaciones relativas al criterio C fueron, como mucho, C1 o C2. Con frecuencia, la prueba de validez se realizó utilizando valores que habían formado parte del análisis que condujo a la proposición general, en vez de coger valores nuevos y distintos para contrastarlos con los patrones reales de conducta matemática. Por ejemplo, en la tarea de las Fracciones de Lacsap, algunos alumnos simplemente dieron nuevas fracciones a partir de su proposición general, pero no evaluaron la validez de los resultados contrastándolos con patrones que estaban disponibles dentro del triángulo de fracciones.

Tipo II:

Este criterio exige que los alumnos realicen un análisis que conduzca a la obtención de una función modelo adecuada, utilizando para ello sus conocimientos de matemáticas. Se espera que las matemáticas utilizadas estén al nivel del programa de estudios, de modo que los alumnos deberían ser capaces de reconocer que en determinadas situaciones es necesario aplicar determinados enfoques. En muchos casos los alumnos simplemente utilizaron técnicas de regresión para establecer modelos, o para establecer posibles modelos que a continuación evaluaron de manera analítica. En algunos casos el alumno se limitó a realizar una regresión lineal, sin plantearse siquiera que pudiera haber otras funciones modelo alternativas. Estas respuestas obtuvieron como mucho una puntuación C2, puesto que el alumno no realizó, tal y como se requería, un análisis que estuviera a la altura del programa de estudios.

Las distintas formas en las que los alumnos abordaron el tema de la bondad del ajuste tenían calidad variable, desde ninguna en absoluto hasta un esmerado análisis del ajuste por tramos (es decir, en diversos intervalos). Algunos incluyeron un análisis cuantitativo del ajuste, aunque esto no es obligatorio realizarlo en Matemáticas NM. Por último, a pesar de que para el nivel C5 se requiere que el alumno compare su modelo analítico con un nuevo conjunto de datos, muchos alumnos simplemente crearon un modelo nuevo, partiendo de cero.

### **Criterio D**

Tipo I:

Aquellos alumnos que consiguieron llegar hasta la proposición general no siempre analizaron adecuadamente el ámbito y/o las limitaciones de dicha proposición. Casi nunca se incluyeron explicaciones informales y, en aquellos casos en que sí se dieron, estaban redactadas de manera deficiente. Algunos alumnos simplemente reiteraron los pasos dados durante la fase de análisis. Hubo unos pocos alumnos que sí que explicaron muy bien de dónde provenía la proposición, en ocasiones incluso empleando buenos métodos formales.

Tipo II:

Muchos alumnos no interpretaron suficientemente los modelos utilizados en el contexto de la tarea elegida. Teniendo en cuenta que el obtener una puntuación D3 o superior depende de dicha interpretación, algunos análisis matemáticos que eran muy buenos no lograron una buena puntuación porque o bien no se incluyó ninguna interpretación o la interpretación que se dio resultó ser muy deficiente. Unos pocos alumnos se esmeraron en ampliar algunos aspectos del modelo a una situación del mundo real, realizando a menudo una investigación adicional para comprender mejor dicha situación. Con frecuencia se ignora el tema de la precisión. Un aspecto de la elaboración de modelos debería ser el plantearse hasta qué punto el modelo se ajusta bien a la situación y qué precisión tiene que tener realmente para proporcionar un buen ajuste. Un modelo cuyos parámetros tengan únicamente unas pocas cifras significativas de precisión puede ser casi tan bueno como una función modelo cuyos parámetros tengan una precisión de 10 cifras significativas.

### **Criterio E**

Algunas tareas resultan más apropiadas que otras para el uso de medios tecnológicos, pero para todas las tareas es necesario utilizarlos. El uso de dichos medios en las tareas de Tipo II fue bueno, en su conjunto, mientras que su uso en las tareas de Tipo I fue en general deficiente. Los alumnos se esforzaron poco por utilizar gráficos para explorar posibles relaciones y por utilizar medios tecnológicos para evaluar el ámbito y las limitaciones de los modelos. En las tareas de Tipo II se hizo un buen uso de los medios tecnológicos para elaboración de gráficos, a pesar de que algunos alumnos parece que creían que bastaba con incluir cualquier gráfico. Algunos gráficos no resultaron eficaces para demostrar el problema que el alumno tenía entre manos, debido a una mala elección de la ventana. Un buen número de alumnos desaprovecharon la oportunidad de utilizar todas las prestaciones de los gráficos; por ejemplo, dibujando varias funciones en los mismos ejes de coordenadas o ampliando la ventana para mostrar el comportamiento a largo plazo.

## Criterio F

A la mayoría de los alumnos se les concedió mercedamente un F1. En unos pocos casos los profesores aplicaron unos estándares o demasiado benévulos o demasiado estrictos para este criterio. Parece que, en lo que respecta a este criterio, algunos profesores están imponiendo sus propios estándares. Con frecuencia no quedaba muy claro por qué motivos a un alumno dado se le había concedido una puntuación F2.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

Si los profesores y los alumnos revisaran detenidamente los criterios de evaluación y los tuvieran en mente a la hora de realizar su trabajo, en ese caso los alumnos obtendrían muchos mejores resultados. Teniendo en cuenta que la carpeta es un trabajo que se evalúa con referencia a criterios establecidos, no basta con que el alumno elabore un trabajo que pueda ser considerado holísticamente como un «buen trabajo». Dentro del trabajo, cada logro evaluable tiene que reflejar algún aspecto de los criterios de valoración.

Los alumnos deben aprender mejor a utilizar la notación adecuada y deben mejorar sus habilidades de comunicación. Esto se puede lograr en el aula, mediante ejercicios cortos que requieran dichas destrezas para solucionar los problemas de las tareas de casa. Sería útil que el profesor estableciera unos estándares sobre qué resulta adecuado y que mantuviera dichos estándares durante toda la asignatura.

El proceso de desarrollar una proposición general y de obtener de una función modelo se puede enseñar. Muchas unidades del programa de estudios se prestan a esto de manera natural, como las progresiones aritméticas y geométricas y las funciones exponenciales o sinusoidales. La conexión entre estas unidades y las tareas de la carpeta se deben hacer deliberadamente en clase.

Muchos de los problemas de aplicación que se hacen en clase a menudo se abordan como simples ejercicios donde lo importante es obtener «la respuesta». El explorar estas aplicaciones modificando los parámetros utilizados o el aplicar los resultados obtenidos a situaciones similares ayudará a los alumnos a darse cuenta de la conexión que existe entre las matemáticas y el mundo real.

En general, teniendo en cuenta que la mayoría de los alumnos han entregado trabajos realizados con procesador de textos, cabría esperar que disponen también de hojas de cálculo básicas y de recursos de Internet. El profesor es el responsable de que desarrollen confianza en sí mismos para utilizar estas y otras herramientas tecnológicas que hay disponibles, de modo que puedan dejar claro cuáles son las expectativas relativas a su utilización.

## Otros comentarios

Ahora que está próxima (el año que viene) la implantación de un nuevo modelo de evaluación interna, cobrará una importancia aún mayor el que tanto profesores como alumnos conozcan y comprendan los criterios de evaluación. Es fundamental que los profesores expliquen a los alumnos cuáles son los niveles de cada criterio, de modo que sepan exactamente qué es lo que se espera de ellos. Cuando los profesores preparen sus muestras para la moderación deberían también detenerse y plantearse que la moderación funcionará mucho mejor si se proporciona a los alumnos los conocimientos previos adecuados y se les dice qué expectativas se tienen sobre ellos, en lo que respecta a las soluciones y al uso de la tecnología. Se deberían hacer comentarios libremente y en el mismo trabajo de los alumnos (no en hojas aparte), de modo que el moderador pueda entender bien por qué se le concedió al alumno la puntuación asignada.

## Prueba 1

### Bandas de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 17	18 - 35	36 - 49	50 - 59	60 - 68	69 - 78	79 - 90

### Comentarios generales

En general, para las preguntas del examen de este año no se requería mucha manipulación aritmética o algebraica, pero sí que era necesaria una buena comprensión de los conceptos. Aquellos alumnos que entendieron los conceptos fueron capaces de responder a las preguntas con una cantidad de trabajo mínima. Lamentablemente, aquellos alumnos que no entendieron bien los conceptos con frecuencia acabaron atascándose en desarrollos enrevesados e innecesarios, los cuales, en la mayoría de los casos, no les condujeron a ninguna respuesta.

### Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Reconocer la simetría de una función cuadrática
- Comprender la diferencia entre el área y la integral definida
- Integrar expresiones exponenciales
- Transformaciones de funciones trigonométricas (circulares)
- Reglas de los logaritmos
- Saber cuál es el valor de una razón trigonométrica para un ángulo del primer cuadrante
- Condiciones necesarias para que exista un punto de inflexión
- Habilidades de razonamiento, y responder a preguntas en contextos no tradicionales

### Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Fue grato comprobar que la gran mayoría de los alumnos hicieron el intento de responder a todas las preguntas, y que hubo muy pocas preguntas que se dejaran completamente en blanco. El tiempo del que disponían para completar la prueba no fue aparentemente un factor decisivo, puesto que no pareció que los alumnos tuvieran que darse una prisa especial para contestar a las últimas preguntas. Además, no parece que los alumnos tuvieran problema alguno para adaptarse a los nuevos cuadernillos de respuestas. En general, los alumnos demostraron tener una buena preparación y un nivel de conocimientos óptimo en las siguientes áreas:

- Probabilidad simple y porcentajes
- Derivadas e integrales de polinomios sencillos

- Multiplicación de matrices
- Funciones compuestas
- Relación entre velocidad y desplazamiento (distancia recorrida)
- Interpretar la información que aparece en tablas y gráficos
- Responder a preguntas realizadas en un contexto sencillo, utilizando un enfoque formulaico

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

### Pregunta 1: Función inversa y función compuesta

Una aplastante mayoría de los alumnos contestaron correctamente a los dos apartados de los que constaba esta pregunta. Hubo unos pocos que parecieron no estar familiarizados con la notación inversa y que en el apartado (a) dieron por respuesta la derivada de la recíproca de la función. Unos pocos alumnos cometieron errores aritméticos en el apartado (b), lo que les impidió hallar la respuesta correcta.

### Pregunta 2: Matrices

Mientras que la mayoría de los alumnos respondieron correctamente a los dos apartados de los que constaba esta pregunta, hubo algunos que parecían no estar demasiado familiarizados con la multiplicación de matrices. Muchos alumnos se dieron cuenta de que no era necesario hacer toda la multiplicación de matrices para hallar los elementos que necesitaban. Lamentablemente, hubo algunos que cogieron el elemento equivocado para hallar  $q$ , lo que hizo que acabaran teniendo la ecuación  $3 + 0q = 3$ .

### Pregunta 3: Trabajo con logaritmos

Esta pregunta, para nuestra sorpresa, demostró ser un verdadero desafío para muchos alumnos. Un error de concepto habitual fue decir que  $p = 6$  y  $q = 7$ . Un gran número de alumnos tuvieron dificultades para aplicar las reglas de los logaritmos, y cometieron numerosos errores en cada apartado de la pregunta. Entre los errores más habituales estaban algunas operaciones incorrectas, como  $\log_3 p^2 = 36$  en el apartado (a),  $\log_3\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\log_3 6}{\log_3 7}$  o  $\log_3\left(\frac{p}{q}\right) = \log_3 6 - \log_3 7$  en el apartado (b), y  $\log_3(9p) = 54$  en el apartado (c).

### Pregunta 4: Funciones inversas y gráficos de estas funciones

En el apartado (a) de esta pregunta la mayoría de los alumnos fueron capaces de hallar correctamente el valor de  $f(2)$ , mientras que algunos tuvieron problemas para hallar  $f^{-1}(-1)$ . Muchos alumnos trataron de hallar una ecuación para la función, o trataron de construir una tabla de valores que les ayudara a encontrar las respuestas. El propósito de esta pregunta era que los alumnos extrajeran las respuestas del gráfico que se les había facilitado. Se debería recordar a los alumnos que cuando el término de examen utilizado sea «Escriba...», no es necesario que incluyan ni muchos cálculos ni mucho desarrollo.

En el apartado (b) de esta pregunta, los alumnos generalmente lograron invertir las coordenadas  $x$  e  $y$  de los puntos clave o lograron realizar una simetría respecto a la recta  $y = x$ , para así dibujar aproximada pero correctamente el gráfico de la función inversa. Entre los errores más habituales

encontramos: no esbozar el gráfico para el dominio adecuado, o esbozar el gráfico de  $f(-x)$  o el gráfico de  $-f(x)$ .

### **Pregunta 5: Gráfico de una función trigonométrica (circular)**

Muchos alumnos fueron capaces de responder sin dificultad a los tres apartados de los que constaba esta pregunta. Algunos alumnos se toparon con dificultades cuando en la ecuación de la función trataron de sustituir los parámetros  $p$ ,  $q$  y  $r$ . Aquellos alumnos que dieron con las respuestas correctas lo lograron utilizando los puntos dados y su comprensión de los distintos tipos de transformaciones.

Parece que el apartado (b) fue el que más difícil resultó; por ejemplo, algunos de los alumnos no entendieron cuál era la relación que había entre  $q$  y el período de la función. También hubo algunos alumnos que mostraron expresiones tales como  $\frac{2\pi}{b}$  sin explicar qué representaba  $b$ .

### **Pregunta 6: Cinemática**

Un buen número de alumnos consiguieron la máxima puntuación en esta pregunta, mientras que muchos otros consiguieron al menos la mitad de los puntos que había en juego. La mayoría de los alumnos supieron integrar, pero aún hubo unos cuantos que trataron de hallar la derivada (en vez de la integral). Muchos alumnos integraron de manera incorrecta el término  $6e^{2t}$ , pero la mayoría consiguieron algunos puntos de método adicionales por la sustitución que realizaron en la función integrada. La mayoría de los alumnos que sustituyeron  $(0, 10)$  en la función integrada sabían que  $e^0 = 1$ .

### **Pregunta 7: Área e integrales**

Había un pequeño error en la figura: en ella, el punto sobre el eje  $y$  aparecía rotulado como «2» (para indicar el radio) en vez de «-2». A los examinadores se les dio instrucciones para que notificaran al centro de evaluación del IB de todos aquellos alumnos que se hubieran visto afectados negativamente por este hecho. Al analizar los exámenes con las respuestas de los alumnos no se observó que hubiera habido ningún efecto adverso; es decir, la mayoría de los alumnos fueron capaces de hallar correctamente el área del cuarto de círculo del apartado (a), muy pocos consideraron que el valor de la integral definida fuese negativa para la parte de la función que se encontraba por debajo del eje  $x$ . En el apartado (b), la mayoría lograron la máxima puntuación restando el área del cuarto de círculo a  $3\pi$ .

Aquellos alumnos que no entendían bien la conexión que existe entre el área y el valor de la integral, con frecuencia trataron de hallar una función que integrar. Estos alumnos no lograron dar con la respuesta correcta utilizando este método.

### **Pregunta 8: Frecuencia y probabilidad**

En su conjunto, los alumnos lograron muy buenas puntuaciones en los apartados (a), (b) y (c) de esta pregunta. La mayoría de los errores cometidos en estos apartados se debieron a que los alumnos no entendieron términos tales como «al menos» o «menor que».

El apartado (d) les resultó difícil a los alumnos, quizás porque no leyeron detenidamente la pregunta ni estudiaron luego los valores de la figura. Muchos parecían confundidos por la idea de que no se eligiera a todas las chicas a las que se les había dado una segunda oportunidad. En el apartado (d)(ii), muchos no calcularon el porcentaje relativo a todo el grupo, sino el porcentaje relativo al subgrupo de chicas a las que se les había dado una segunda oportunidad.

**Pregunta 9: Derivadas simples y funciones cuadráticas**

En el apartado (a), la mayoría de los alumnos hallaron correctamente la derivada de la función. En el apartado (b), muchos alumnos no entendieron bien la importancia y la relevancia del eje de simetría y del punto conocido (0,5), por lo que no fueron capaces de hallar  $g(4)$  haciendo uso de la simetría. Unos pocos alumnos recurrieron a manipulaciones más complejas de la función, pero cometieron luego numerosos errores algebraicos.

En el apartado (c) un gran número de alumnos fueron capaces de escribir simplemente el valor correcto de  $h$ , tal y como se pedía en esta pregunta (pues se utilizó el término de examen «Escriba...»). Unos pocos alumnos escribieron el valor negativo incorrecto. Muchos alumnos trataron acertadamente de sustituir en la función los valores de  $x$  e  $y$  del punto conocido, pero nuevamente se cometieron muchos errores aritméticos y algebraicos que les impidieron dar con el valor correcto de  $a$ .

En el apartado (d) los alumnos tenían que hallar la derivada de  $g$  e igualar ese resultado a la respuesta obtenida en el apartado (a). A pesar de que muchos alumnos consiguieron simplificar la ecuación hasta llegar a  $\cos x = 0$ , muchos de ellos no supieron cómo resolver la ecuación para  $x$  en este punto. Aquellos alumnos que cometieron errores en los apartados (a) y/o (c) todavía pudieron obtener puntos de arrastre de error en el apartado (d).

**Pregunta 10: Análisis**

Casi todos los alumnos que trataron de responder a los apartados (a) y (c) lo hicieron correctamente, puesto que para estas preguntas simplemente necesitaban entender la notación que se estaba utilizando y leer los valores de la tabla incluida en la pregunta.

En el apartado (b) la mayoría de los alumnos lograron un punto por indicar que  $h''(x) = 0$  en el punto P. Dado que esto no basta para determinar un punto de inflexión, muy pocos alumnos lograron la máxima puntuación en esta pregunta.

El apartado (d) les resultó bastante difícil incluso a los mejores alumnos, puesto que casi ninguno de ellos utilizó la regla del producto para hallar  $h'(3)$ . El error más frecuente fue decir que  $h'(3) = f'(3) \times g'(3)$ . A pesar de este error, muchos alumnos lograron puntos de método adicionales por los cálculos realizados para hallar la ecuación de la normal. También hubo un número reducido de alumnos que fueron capaces de hallar la ecuación para  $h''(x)$  y, a partir de ahí,  $h'(x)$ . Estos alumnos generalmente lograron la máxima puntuación, a pesar de que con este método se tarda bastante más tiempo.



## Prueba 2

### Bandas de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 15	16 - 31	32 - 43	44 - 53	54 - 64	65 - 74	75 - 90

### Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Resolución de ecuaciones con la calculadora de pantalla gráfica
- Manipulaciones algebraicas
- Desarrollo de la potencia de un binomio
- Probabilidad condicionada
- Valor esperado
- Dibujar aproximadamente un gráfico en un dominio concreto
- Área entre curvas

### Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

En la mayoría de los temas, los alumnos demostraron tener un buen nivel de conocimientos y de comprensión. Entre los temas que más dominaban estaban:

- Matrices con la calculadora de pantalla gráfica
- Distribución normal
- Razones trigonométricas en un triángulo
- Vectores
- Distribución binomial y probabilidad

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

### Pregunta 1: Inversa de una matriz y ecuación matricial

Esta pregunta les resultó muy asequible a la mayoría de los alumnos. La mayoría de los alumnos utilizaron la calculadora en los dos apartados de la pregunta, aunque hubo unos pocos que trataron de utilizar un sistema de ecuaciones en el apartado (b). Un número sorprendentemente elevado de alumnos dio como respuesta al apartado (b)  $X = (-4, 4, 5)$ , OMITIENDO EL SIGNO MENOS EN EL TERCER ELEMENTO. En algunos casos los alumnos dieron con la respuesta correcta en el apartado (b) partiendo del desarrollo incorrecto de  $X = BA^{-1}$ , lo que les costó un punto.

### Pregunta 2: Distribución normal

La distribución normal fue un tema que los alumnos trataron y resolvieron mejor que en años anteriores; de hecho, muchos de ellos resolvieron correctamente ambos apartados y muy pocos dejaron en blanco la pregunta. Algunos alumnos utilizaron tablas y puntuaciones z, mientras que otros recurrieron directamente a la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Aquellos que utilizaron la CPG obtuvieron la máxima puntuación con mayor frecuencia que aquellos que abordaron el problema utilizando puntuaciones z. Un error habitual en el apartado (b) fue igualar la expresión de la puntuación z a la probabilidad. Muchos alumnos tuvieron dificultades para dar las respuestas redondeando a tres cifras significativas; esto constituyó un problema especialmente en aquellos casos en los que no se mostró el desarrollo del ejercicio.

### Pregunta 3: Razones trigonométricas en un triángulo

La inmensa mayoría de los alumnos resolvieron muy satisfactoriamente esta pregunta. Una pequeña minoría dibujaron la altura desde C y utilizaron luego las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. Entre los errores observados estuvieron: trabajar en modo radianes, suponer que el ángulo en C era de  $90^\circ$ , y aplicar incorrectamente el orden de las operaciones al evaluar la teorema del coseno.

### Pregunta 4: Intersección de rectas en el espacio (3-D)

Muchos alumnos fueron capaces de determinar una o más ecuaciones, pero muy pocos optaron por utilizar la calculadora de pantalla gráfica para resolver el sistema de ecuaciones resultante. Los errores algebraicos cometidos impidieron a muchos de estos alumnos obtener al final la máxima puntuación (tres puntos). Algunos alumnos dejaron el ejercicio a medias, deteniéndose tras hallar el valor de s y/o el de t.

### Pregunta 5: Series geométricas

Muchos de los alumnos obtuvieron sin errores dos ecuaciones de dos variables, pero fueron muchos menos los que fueron capaces de resolverlas correctamente para dar con el valor de r. Algunos alumnos leyeron mal los datos de partida; por ejemplo, los valores 440 o 62,755, mientras que algunos de los alumnos que hicieron el examen en francés o en español se equivocaron al interpretar la coma decimal como si fuera un separador de millares. Muchos de los alumnos que trataron de resolver la pregunta con métodos algebraicos no eliminaron el factor  $1-r$  a ambos lados de la igualdad, con lo que acabaron encontrándose con una ecuación de 4º grado que no fueron capaces de resolver. Asimismo, algunos de estos alumnos obtuvieron la extraña respuesta  $r=1$ . Algunos alumnos utilizaron un mínimo de álgebra para eliminar el primer término y, a continuación, resolvieron rápidamente la ecuación resultante haciendo uso de la calculadora de pantalla gráfica.

### Pregunta 6: Teorema del binomio

A muchos alumnos se les atragantó esta pregunta, en mayor o menor medida. Algunos tuvieron dificultades con el desarrollo de la potencia de un binomio, mientras que otros no entendieron que el término constante no tiene ninguna x, y otros fueron incapaces de simplificar una razón de exponenciales con una base común. Algunos alumnos hallaron  $r=3$  empleando métodos

algebraicos, mientras que otros hallaron la respuesta escribiendo los primeros términos del desarrollo. En algunos casos, los alumnos se limitaron a igualar todo el desarrollo a 1.280.

### **Pregunta 7: Razones trigonométricas en un círculo**

Tal y como cabía esperar, a los alumnos les costó resolver este problema. En el apartado (a), muchos lograron utilizar las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo para hallar la longitud de OC. Aquellos que emplearon un enfoque sistemático en el apartado (b) lograron mejores puntuaciones que aquellos cuyo desarrollo del ejercicio estaba desordenado y disperso por toda la página. Nos complació comprobar que un elevado número de alumnos hallaron correctamente el área del sector circular AOB, aunque fueron muchos menos los que luego fueron capaces de obtener el área del triángulo BOC. Aquellos alumnos que optaron por un enfoque analítico para resolver la ecuación resultante lograron, en general, una peor puntuación que aquellos que recurrieron a la calculadora de pantalla gráfica. En general, aquellos alumnos que convirtieron el ángulo a grados no lograron una puntuación muy buena en esta pregunta.

### **Pregunta 8: Ángulo entre vectores**

La mayoría de los alumnos hallaron correctamente los vectores que determinaban los puntos dados en el apartado (a). En el apartado (b), mientras que la mayoría de los alumnos hallaron correctamente el valor de  $a$ , muchos trabajaron innecesariamente con los módulos de los vectores, lo que en ocasiones les llevó a cometer errores algebraicos. Algunos alumnos incluyeron muy poco desarrollo en el apartado (c)(i) del ejercicio. Sin embargo, dado que se trataba de una pregunta del tipo «Muestre que...», los alumnos han de asegurarse de que el desarrollo del ejercicio conduzca claramente hasta la respuesta dada. Un error habitual fue simplificar el módulo del vector AC a  $\sqrt{20a^2}$  en vez de  $a\sqrt{20+a^2}$ . En el apartado (c)(ii) un número de alumnos decepcionantemente elevado se embarcó en la búsqueda (casi siempre infructuosa) de una solución algebraica, en vez de resolver simplemente la ecuación resultante con ayuda de la calculadora de pantalla gráfica. Muchos de estos alumnos demostraron tener una habilidades de manipulación algebraica bastante pobres, cometiendo muchos y diversos errores relacionados con el manejo de raíces cuadradas.

### **Pregunta 9: Distribución binomial y probabilidad**

Los alumnos en general contestaron bastante bien a los apartados (a)(i) y (ii), utilizando bien un diagrama de árbol o un enfoque binomial. El apartado (a)(iii) les planteó más dificultades, puesto que muchos de los alumnos tuvieron problemas para hallar  $P(X=2)$  o para utilizar  $E(X)=np$ . Una gran mayoría de los alumnos se mostraron seguros de sí mismos a la hora de responder al apartado (b) con la calculadora de pantalla gráfica, aunque algunos de ellos sí que escribieron el término binomial. Aquellos alumnos que no hicieron uso de la función binomial en la calculadora de pantalla gráfica tuvieron más dificultades en el apartado (c), aunque también nos fue grato comprobar que aun así, un número bastante elevado de alumnos se dieron cuenta de que estaban buscando  $P(X \leq 5)$ . Mientras que la mayoría de los alumnos supieron cómo utilizar la probabilidad condicionada en el apartado (d), no todos lograron dar con la respuesta correcta, y menos todavía supieron redondear correctamente la respuesta a dos lugares decimales. El error más habitual fue multiplicar las probabilidades para la hallar la intersección que se necesita en la fórmula de la probabilidad condicionada. En su conjunto, los alumnos parecían estar mejor preparados en el campo de la probabilidad.

### **Pregunta 10: Área entre curvas**

Hubo un pequeño fallo con el dominio indicado en esta pregunta. Aunque no se trataba de un error propiamente dicho, este hecho implicaba que el apartado (b) ya no evaluaba lo que estaba previsto. El esquema de calificación incluía diversas soluciones dependiendo del desarrollo del ejercicio que hubiese plasmado el alumno. Asimismo, los examinadores recibieron instrucciones para que notificaran al centro de evaluación del IB de todos aquellos alumnos que se hubieran visto afectados negativamente por este hecho. Todo estos datos se analizaron durante la reunión de evaluación.

Mientras que algunos alumnos hicieron un bosquejo bastante preciso de los gráficos cubriendo el dominio indicado, la mayoría de los alumnos no lo hicieron. Además del error habitual del dominio, algunas curvas exponenciales se representaron gráficamente con varios cambios de concavidad. En el apartado (a)(ii), la mayoría de los alumnos hallaron correctamente la intersección. En general, aquellos que utilizaron la calculadora de pantalla gráfica para evaluar la integral numéricamente hallaron la respuesta correcta, al contrario de lo que sucedió con aquellos que trataron de resolverla con antiderivadas (primitivas). Un error habitual fue hallar el área de la región delimitada por  $f$  y por  $g$  (a pesar de que dicha región incluía a un punto de intersección que estaba fuera del dominio dado), en vez de hallar el área de la región delimitada por  $f$ , por  $g$  y por el eje  $y$ . Mientras que algunos alumnos demostraron tener una buena capacidad de razonamiento en el apartado (b), menos fueron los que lograron hallar el valor de  $m$  que maximizaba el área de la región. Además de por la respuesta obtenida partiendo del dominio restringido, se concedió la máxima puntuación por la respuesta obtenida utilizando el punto de tangencia.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos – Pruebas 1 y 2

Se debería alentar a los alumnos a que muestren todo el desarrollo de cada ejercicio (razonamiento, cálculos, etc.) de manera cuidada, ordenada y bien organizada. Con «desarrollo matemático» no nos referimos únicamente a los pasos algebraicos dados, sino que el término también engloba al razonamiento necesario para llegar a la solución. El empleo de notación matemática correcta no se evalúa explícitamente en los exámenes, pero tener una base sólida en notación es un pilar esencial del aprendizaje matemático. El uso de una notación descuidada o poco ortodoxa por parte de los alumnos se puede perdonar si los elementos matemáticos de una pregunta se han expresado razonablemente bien. Sin embargo, hay ocasiones en las que una notación descuidada o poco ortodoxa interfiere con la expresión matemática de un concepto.

Si se comete un error, lo mejor es trazar simplemente una «X» o una línea tachando todas las operaciones descartadas. Los cálculos incorrectos que no se hayan tachado se considerarán parte de la respuesta, por lo que se puntuarán de acuerdo con el esquema de calificación, incluso aunque más adelante el alumno haya añadido otro desarrollo distinto.

Los alumnos han de tener acceso a exámenes y esquemas de calificación de años anteriores, y deberían utilizar estos exámenes para practicar. El responder a exámenes antiguos simulando las condiciones reales de un examen (tiempo limitado) expone a los alumnos a distintos tipos de preguntas y les ayuda a encontrar el ritmo apropiado para poder completar el examen en el tiempo establecido.

Hubo algunos comentarios en los formularios de opiniones y comentarios de los profesores en los que se sugería que los alumnos no estaban familiarizados con parte de la notación y la terminología utilizadas en el examen. La notación y la terminología utilizadas en los cuestionarios de examen aparecen publicadas en la guía de la asignatura de Matemáticas NM. El practicar con preguntas provenientes de exámenes anteriores ayudará a los alumnos a familiarizarse tanto con el estilo y el formato de las preguntas como con la notación y la terminología empleadas.

Leer el esquema de calificación puede ayudar a alumnos y profesores a comprender qué se les pide que hagan dependiendo de cuál sea el término de examen utilizado; por ejemplo, «Escriba...», «Halle...», «Dibuje aproximadamente...» o «Explique...». Generalmente no se necesita papel milimetrado para hacer un bosquejo (representación gráfica aproximada). Los gráficos hay que dibujarlos aproximadamente pero con esmero, prestando atención a (y rotulando) las características más importantes, tanto las generales (por ejemplo, los cortes con los ejes), como otras más específicas que se mencionen expresamente en la pregunta. En una pregunta del tipo «Muestre que...», debería quedar patente en el penúltimo paso que en la siguiente línea se da el resultado final. Para esto, es posible que los alumnos tengan que mostrar pasos de simplificación adicionales.

Se debería alentar a los alumnos a que, antes de comenzar a hacer cálculos, lean cada pregunta con detenimiento y se planteen qué datos les han proporcionado y qué les pide la pregunta que calculen. Los alumnos también pueden buscar pistas escondidas dentro de la información que les han proporcionado. Con el fin de evitar errores, los alumnos deberían comprobar lo que escriben cuando estén transcribiendo información.

Los alumnos no están estableciendo las conexiones oportunas entre los distintos apartados de una misma pregunta. La mayoría de las preguntas giran en torno a un mismo «tema», y normalmente se espera que los alumnos utilicen los resultados de un apartado en apartados posteriores. Sin embargo, con frecuencia no logran ver la trascendencia de sus resultados. A los alumnos se les debería enseñar a reflexionar sobre el significado de los resultados, haciéndose preguntas del tipo: «¿Por qué se formula la pregunta que se incluye en este apartado?» o «¿Qué relevancia tiene para el siguiente apartado?»

Se les debe proporcionar a los alumnos la experiencia necesaria para trabajar con preguntas «no convencionales» sobre distintas áreas del programa de estudios. Esto les ayudará a transferir los conocimientos adquiridos de un área de las matemáticas a otra. Hay que alentar a los alumnos a que vean las matemáticas como un todo, más que como un conjunto discreto de temas o unidades. Cuando estudien el desarrollo de binomios, los alumnos deberían aprender a hallar términos concretos y deberían practicar esta habilidad. La comprensión de la probabilidad condicionada debería ir más allá de la mera sustitución de las variables en la fórmula. Probabilidad y estadística, de acuerdo con lo que han demostrado los alumnos, sigue siendo el área del conocimiento más floja. Se debería alentar a los colegios a garantizar que los alumnos reciban una preparación completa que abarque todos los aspectos de esta asignatura.

## Prueba 1

Mientras que muchos alumnos suelen recurrir a las fórmulas cuando se topan con preguntas sobre probabilidad condicionada, pocos tienen la comprensión conceptual necesaria para ir más allá de lo que aparece en el cuadernillo de información. En aquellas situaciones en las que no se proporciona un diagrama de árbol, podría resultarles útil a los alumnos el crear su propio diagrama, para que puedan determinar de un modo más visual que el denominador de la fórmula se calcula mediante dos caminos.

## Prueba 2

En la prueba 2 no solo está permitida sino que es necesario utilizar la calculadora de pantalla gráfica. A los alumnos se les debería alentar a que se plantearan, a la hora de responder a una pregunta dada de la Prueba 2, si el uso de la calculadora de pantalla gráfica resulta adecuado. A pesar de que las habilidades básicas en el manejo de la calculadora de pantalla gráfica (CPG) están mejorando, todavía hay alumnos que optan por un enfoque analítico en vez de decantarse por un enfoque más eficiente basado en la CPG. Esto sucede sobre todo con las aplicaciones menos obvias de la CPG, como son la resolución de ecuaciones, el hallar intersecciones o la evaluación de integrales definidas. Con frecuencia esto conduce a errores algebraicos simples y les hace perder a los alumnos un tiempo precioso. Debería insistirse más en que una vez que se ha establecido una ecuación, no es necesario incluir operaciones algebraicas para sustentar la respuesta. Los profesores deberían hacer más hincapié en la integración de los medios tecnológicos como herramienta para el aprendizaje y para comprender mejor conceptos clave, así como para resolver problemas comunicando con claridad las soluciones.

A muchos alumnos les sigue costando saber qué cálculos han de mostrar cuando utilizan medios tecnológicos. Se deben incluir cálculos en todos los pasos que haya que dar antes de utilizar la calculadora de pantalla gráfica. Se debe utilizar notación matemática, no notación de calculadora. El escribir «se utilizó la calculadora de pantalla gráfica» no es prueba suficiente de haber empleado un enfoque válido. Algunos ejemplos de esto se pueden encontrar en las «soluciones de los alumnos» correspondientes a los exámenes de mayo de 2010. Estos documentos están incluidos en los

informes de la asignatura, que están disponibles en el CPEL.

Los alumnos deben asegurarse de que la calculadora de pantalla gráfica que utilicen esté en el modo correcto (p. ej., radianes o grados) Hay que enseñarles que no deben transcribir los gráficos de la calculadora de pantalla gráfica sin antes pararse a pensar cuál es su conocimiento intrínseco de las características clave y del comportamiento de las funciones utilizadas. Se les debería alentar a utilizar aquellas herramientas de la calculadora de pantalla gráfica que les permitan encontrar y rotular las características clave de los gráficos.

Hay que guardar en la memoria los valores numéricos (incluidas las respuestas dadas redondeando a tres cifras significativas) en formato «long» (el más preciso) si dicho valor se va a necesitar en apartados posteriores de la pregunta. El utilizar valores poco precisos o redondeados antes de tiempo puede hacer que las respuestas finales que se obtengan sean incorrectas.