MATEMÁTICAS NM TZ2

Bandas de calificación de la asignatura

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 – 14	15 – 28	29 – 45	46 – 58	59 – 70	71 – 83	84 – 100

Variantes regionales de las pruebas de exámenes

Con el fin de proteger la integridad de los exámenes, se está haciendo cada vez más uso de las variantes regionales de los exámenes. El uso de estas variantes del mismo examen implica que los estudiantes de una región del mundo no siempre estarán rindiendo la misma prueba que los estudiantes de otras regiones. Se aplica un riguroso proceso para poder asegurar que las pruebas son comparables en cuanto a su nivel de dificultad y al contenido que evalúan, y se toman medidas para garantizar la aplicación de los mismos estándares en la evaluación de los exámenes correspondientes a las diferentes versiones de las pruebas. Para la convocatoria de mayo de 2010, el BI ha elaborado variantes regionales de las pruebas de Matemáticas NM.

Evaluación interna

Bandas de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 – 7	8 – 13	14 – 19	20 – 23	24 – 28	29 – 33	34 – 40

Ámbito y adecuación del trabajo entregado

La mayoría del trabajo entregado provino del conjunto de tareas vigente, desarrollado por el BI. Las tareas sobre binomios matriciales y el índice de masa corporal estuvieron entre las más populares. La calidad de las tareas diseñadas por los profesores fue muy variada. Si las tareas no les permitían a los alumnos alcanzar todos los niveles de evaluación, el resultado fue, por lo general, una importante moderación negativa de las notas. Algunos colegios entregaron trabajo atípico sin agregar a la muestra una carpeta que reemplazara las de estos alumnos. En términos generales, la calidad del trabajo de los alumnos fue buena; hubo también algunos ejemplos sobresalientes.

Desempeño de los alumnos con respecto a cada criterio

En términos generales, hay mucha evidencia de que los profesores y los alumnos comprenden bien los criterios y realizan marcados esfuerzos por preparar trabajo de buena calidad. A continuación se detallan algunas cuestiones que generan preocupación.

Criterio A: Sigue existiendo un problema con el uso de notación de calculadora y la falta de uso de un signo adecuado para “aproximadamente igual a”. En la tarea de modelización, los alumnos a menudo utilizan la misma variable dependiente en distintas funciones modelo.

Criterio B: El uso del estilo “pregunta y respuesta” constituye un problema: algunos profesores y alumnos abordan la tarea como si se tratara de una serie de ejercicios de deberes. El trabajo debe organizarse en forma de texto matemático integrado, con las gráficas y las tablas presentadas en su contexto, y no como apéndices. El rotulado correcto de las gráficas es un problema, especialmente cuando los alumnos han utilizado medios tecnológicos para obtenerlas pero no saben cómo aplicarles rótulos a los ejes.

Criterio C Tipo I: A menudo, los alumnos no presentan evidencia o análisis suficientes como para fundamentar sus proposiciones generales. Por ejemplo, en la tarea “Matrices binomiales”, muchos anunciaban que $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\wedge n=\boldsymbol{A}\wedge n+\boldsymbol{B}\wedge n$, sin fundamento coherente alguno. Fue frecuente que los alumnos “validaran” la proposición general presentada, utilizando los mismos valores que habían usado para desarrollarla. El proceso de validación requiere el uso de valores adicionales y la comparación de los resultados con respecto al comportamiento matemático en el contexto de la tarea.

Criterio C Tipo II: Muchos alumnos no definen explícitamente las variables, los parámetros y las restricciones. Tal como ocurre con las tareas de Tipo I, los alumnos no están brindando un análisis suficiente y apropiado para el desarrollo de sus funciones modelo. En algunos casos, los profesores siguen permitiendo el uso de modelos de regresión generados por la calculadora o la computadora, sin ninguna fundamentación matemática. Existe alguna confusión sobre el uso de las transformaciones gráficas en el desarrollo de un modelo. Si los estudiantes utilizan adecuadamente sus conocimientos acerca de estas transformaciones y muestran una serie de intentos de ajustar una función modelo a partir de la aplicación adecuada de modificaciones a una función básica original, pueden entonces lograr la máxima puntuación en el criterio C. Los comentarios acerca del ajuste del modelo a los datos son, en general, superficiales. Deberían incluir datos específicos sobre el ajuste de la función a los datos en determinados intervalos, en los extremos, etc., en lugar de una simple afirmación del tipo "se ajusta bien". Si bien en Matemáticas NM no se espera un análisis cuantitativo, el alumno debería decir algo más que "se ajusta bien". Se deberían identificar los intervalos donde el ajuste es bueno y aquellos donde no lo es, y hacer un comentario al respecto.

Criterio D Tipo I: Aquí, los principales problemas son la exploración del alcance y las limitaciones, y la calidad de la explicación brindada. Dado que cuentan con una calculadora de pantalla gráfica, se espera que los alumnos exploren una amplia variedad de valores para sus proposiciones generales. Muchos se focalizan solo en los enteros positivos, obviando por completo cualquier otra posibilidad. A la mayoría de los alumnos les resultó difícil explicar la proposición general.

Criterio D Tipo II: Si bien la mayoría de los alumnos demostró que tenía la capacidad matemática para hacerle corresponder una función a los datos, muchos tuvieron dificultades a la hora de reflexionar sobre el modelo en contexto, o simplemente hicieron caso omiso de este aspecto. Los alumnos parecen no ver la conexión entre la realidad y los atributos matemáticos de las variables y las gráficas. Hubo poca aplicación de pensamiento crítico a las situaciones analizadas.

Criterio E: Es evidente que el uso de graficadores tecnológicos está aumentando. Muchos alumnos presentaron gráficas de muy buena calidad, algunas de las cuales diferenciaban los distintos modelos por medio del color. Si bien este es un avance positivo, hubo también casos de alumnos que utilizaron la tecnología irreflexivamente. Las gráficas, por sí mismas, no enriquecen el desarrollo de las tareas.

Criterio F: Este criterio fue bien comprendido por la mayoría de los profesores. En la mayoría de los casos, a un intento razonable de completar la tarea se le otorgó F1. Los profesores parecen darse cuenta de que las calificaciones de F0 y F2 son –con razón– poco frecuentes.

Recomendaciones para la enseñanza a futuros alumnos

Se les debería recordar a los alumnos que pueden cotejar su trabajo con respecto a los criterios de evaluación, a fin de asegurarse de haber abordado todos los componentes importantes de la evalución. Sin embargo, resulta necesario que los profesores se tomen un tiempo para ayudar a los alumnos a entender los criterios. En vista de lo claras que son las expectativas de los niveles C1 y C2 en una tarea de Tipo II, no hay excusa para que los alumnos no identifiquen correcta y explícitamente las variables, los parámetros y las restricciones, si bien puede ser necesario que los profesores les expliquen las diferencias que existen entre ellos. Los profesores podrían hacer que los alumnos desarrollen una tarea, a modo de práctica, y que la evalúen ellos mismos, sobre la base de los criterios.

Se les debería enseñar a los alumnos a considerar el trabajo como la elaboración de un texto matemático, que requiere una redacción cohesiva e integral, y debe permitir una lectura fluida.

Sería beneficioso para los alumnos que se discutieran los propósitos de las diferentes tareas. Los procesos de investigación matemática y modelización matemática pueden resultarles ajenos. La necesidad de evidencia y análisis adecuados, así como la conciencia de que es necesario reflexionar críticamente acerca de las implicancias del trabajo, son habilidades importantes que los profesores pueden explicar. Aquí también sería útil realizar una tarea a modo de práctica. El uso de la tecnología debe ir más allá de la mera producción de gráficas. Los alumnos deberían comprender mejor el alcance de la tecnología que tienen a su disposición, como instrumento para explicar y explorar.

Se recuerda a los profesores que deben escribir sus comentarios en las hojas del trabajo de los alumnos, para explicar por qué se otorgó determinada puntuación. También se espera que los profesores provean resoluciones de las tareas, para explicitar así sus propias expectativas con respecto a cómo alcanzar los niveles de cada criterio. También deberían focalizarse en un solo problema, en lugar de extenderse en preguntas con múltiples apartados, ya que estos tienden a tornar confusa la corrección.

Resultaría beneficioso para todos los profesores leer detenidamente los informes de asignatura – tanto el vigente como los anteriores–, y participar en los foros de discusión del Centro Pedagógico en Línea.

Evaluación externa

Prueba 1

Bandas de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 – 11	12 – 22	23 – 40	41 – 52	53 – 64	65 – 76	77 – 90

Áreas del programa y del examen que resultaron difíciles para los alumnos

- Hallar un vector unitario en la dirección de otro vector
- Trabajar con funciones trigonométricas de determinados ángulos (0, $\pi/2$, π, y $3\pi/2$)
- Relacionar la derivada con la pendiente de una curva
- Aplicar las propiedades de los logaritmos
- Interpretar la segunda derivada a partir de la concavidad de una gráfica
- El concepto de la constante de integración
- Probabilidad condicional y probabilidad combinada
- La operatoria algebraica y la aritmética con fracciones

Áreas del programa y del examen en que los alumnos demostraron estar bien preparados

Como es de esperar, el nivel de conocimiento y comprensión de los alumnos fue muy variado. Un número importante de alumnos dieron muestras de estar bien preparados para la prueba 1, sin calculadora. En la mayoría de los casos, los alumnos mostraron bien el desarrollo de sus resoluciones. Los alumnos se desempeñaron bien en los siguientes temas:

- el uso del producto escalar en la perpendicularidad
- la composición de funciones
- la multiplicación de matrices
- la diferenciación y la integración de funciones polinómicas
- darse cuenta de que un área puede hallarse por medio de la integración

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1

La mayoría de los alumnos pudo resolver correctamente algunos o todos los apartados de esta pregunta; algunos utilizaron una combinación de álgebra y razonamiento gráfico, mientras que otros hicieron caso omiso de la gráfica y trabajaron solo algebraicamente. Algunos no se dieron cuenta de que p y q son las raíces de la función cuadrática y consiguientemente dieron como respuestas 2 y –4. Un error común en el apartado (b) fue no escribir una ecuación.

Algunos alumnos escribieron la ecuación $x = \frac{-b}{2a}$ pero no pudieron reemplazar correctamente. Estos alumnos no se dieron cuenta de que el eje de simetría siempre se encuentra en el punto medio entre las raíces. Fueron más los alumnos que tuvieron dificultades con el apartado (c), en el que hubo cantidad de errores, tanto en las sustituciones como en las simplificaciones.

Pregunta 2

El apartado (a) fue, en general, bien resuelto; los alumnos emplearon diferentes métodos válidos para hallar el vector $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Algunos alumnos efectuaron la resta entre los vectores dados, pero invirtiendo el orden; otros simplemente los sumaron. Los errores de cálculo fueron bastante frecuentes.

En el apartado (b), muchos alumnos parecían no saber cómo hallar un vector unitario. Algunos intentaron escribir la ecuación vectorial de una recta, mostrando así no estar familiarizados con el concepto de vector unitario, mientras que otros dieron el vector $(1, -1, 1)$ o escribieron el mismo vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ como combinación lineal de $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$. Algunos alumnos hallaron correctamente la magnitud pero no escribieron, a continuación, el vector unitario.

Generalmente, los alumnos pudieron comprobar, correctamente, que los vectores en el apartado (c) eran perpendiculares. Muchos utilizaron el método eficiente –comprobar que el producto escalar era nulo–, mientras que otros trabajaron algo más de lo necesario y utilizaron la regla del coseno para hallar el ángulo entre los dos vectores.

Pregunta 3

La mayoría de los alumnos pudo multiplicar las matrices del apartado (a), aunque algunos cometieron errores aritméticos menores. Hubo algunos alumnos que emplearon métodos creativos, aunque incorrectos, en la multiplicación.

Muchos alumnos tuvieron más dificultad con el apartado (b). Los alumnos de mayor habilidad se dieron cuenta de que la solución de la ecuación matricial era el cálculo que acababan de realizar en el apartado anterior y terminaron, pero muchos alumnos creyeron necesario hallar la matriz inversa. Algunos luego se dieron cuenta de que esto era innecesario y retomaron la resolución más sencilla mientras que otros, o bien se detuvieron allí, o bien perseveraron y crearon un sistema de ecuaciones. Unos pocos pudieron resolver el sistema correctamente, pero muchos cometieron errores o malgastaron tiempo valioso, al embarcarse en una extensa resolución, para una pregunta que valía 2 puntos. Algunos alumnos que abordaron la resolución a partir del álgebra matricial no tuvieron en cuenta el carácter no conmutativo de la multiplicación de matrices, o intentaron dividir por la matriz inversa, dando muestras así de una falla fundamental en la comprensión de la operatoria de matrices.

Pregunta 4: Composición de funciones y trigonometría

En el apartado (a), unos cuantos alumnos no pudieron evaluar $\cos\pi$, y o bien lo dejaron sin resolver, o lo evaluaron incorrectamente.

Casi todos los alumnos evaluaron la función compuesta del apartado (b) en el orden dado; muchos obtuvieron puntos por coherencia (arrastre de error) a partir de respuestas incorrectas al apartado (a). Tanto en el apartado (a) como en el (b), hubo alumnos que usaron correctamente las fórmulas de ángulo doble para llegar al resultado correcto; si bien este es un método válido, requería un trabajo adicional innecesario.

Los alumnos no tuvieron tanto éxito en el apartado (c). Muchos trataron de usar fórmulas de ángulo doble, pero o bien utilizaron incorrectamente la fórmula o bien la usaron solamente para escribir la expresión en función de $\cos x$ y luego no siguieron la resolución. Hubo unos cuantos casos en los que los alumnos llegaban “accidentalmente” a la respuesta correcta, a partir de errores, o simplemente adivinando, y no obtuvieron puntos por su respuesta final. Fueron pocos los alumnos que se dieron cuenta cuál era el método apropiado para resolver esta pregunta.

Pregunta 5

El rendimiento de los alumnos en esta pregunta fue variado. A aquellos que entendían la relación entre la derivada y la pendiente de la recta normal no les preocupó la falta de estructura de la pregunta; la resolvieron con claridad y en pocos pasos, y obtuvieron la puntuación máxima. Aquellos que no tenían tan claro este concepto o bien obtuvieron algunos puntos por hallar la derivada y reemplazar $x=1$, o bien no obtuvieron ningún punto, porque sus resoluciones no utilizaban la derivada. Se vieron diversos errores: simplemente hallar la ecuación de la recta tangente o la normal, igualar la derivada a la pendiente de la normal, e igualar la función a la ecuación de la normal o de la tangente. Entre los alumnos que demostraron entender mejor la pregunta, fueron más los que usaron la pendiente de la normal (la ecuación $-1/4k=-1/8$) que los que usaron la de la tangente $(4k=8)$; esto derivó en mayor cantidad de errores algebraicos para llegar a la respuesta final de $k=2$. Muchos de los alumnos que no supieron resolver la pregunta escribieron infinidad de pasos matemáticos irrelevantes, sin tener plan alguno en mente, y no obtuvieron puntos.

Pregunta 6

En general, a los alumnos que tenían una sólida comprensión de las propiedades de los logaritmos les fue bien en este problema; resolvieron la cuadrática resultante, ya sea factorizando, o utilizando la fórmula cuadrática. La mayoría de estos alumnos descartaron, acertadamente, la solución que no pertenecía al dominio. Unos cuantos alumnos, sin embargo, demostraron tener poca comprensión de las propiedades de los logaritmos. Algunos de estos alumnos pudieron usar bien una propiedad, pero al no poder aplicar ambas, no lograron avanzar demasiado. Algunos alumnos utilizaron la estrategia del “ensayo y error”, pero a este método no se le otorgó la máxima puntuación.

Pregunta 7

La calidad de las respuestas a los apartados (a) y (b) fue de variada calidad. Los alumnos con mayores dificultades o utilizaron, equivocadamente, las raíces de *f*, o dejaron la pregunta sin contestar. En el apartado (a), algunos escribieron solo dos de los tres valores. A menudo, los alumnos que respondieron correctamente el apartado (a) tuvieron dificultades a la hora de escribir el conjunto de valores del apartado (b), entre ellas la notación deficiente y la inclusión de los puntos extremos. Otros alumnos escribieron aquí una lista de valores de *x*, en lugar de un intervalo de valores.

En el apartado (c), a muchos alumnos les resultó difícil explicar por qué la segunda derivada es negativa. Algunos sostuvieron que, dado que el punto D estaba “cerca” de un valor máximo, la segunda derivada debía ser negativa; este uso incorrecto del criterio de la segunda derivada indica que existe falta de comprensión acerca de cómo funciona el criterio y del concepto relativo de proximidad. Algunos alumnos afirmaron que D era un punto de inflexión, demostrando nuevamente poca comprensión de la segunda derivada. Entre los alumnos que resolvieron bien el apartado (c), algunos afirmaron que *f* era cóncava hacia abajo, mientras que otros brindaron argumentos bien estructurados para explicar por qué la primera derivada era decreciente. Unos pocos alumnos dibujaron gráficas aproximadas de f' y f'' y las utilizaron en sus explicaciones.

Pregunta 8

Muchos alumnos resolvieron bien esta pregunta. En el apartado (a), algunos alumnos hallaron $f''(-4/3)$ y no supieron cómo terminar, pero la mayoría demostró tener buena comprensión del criterio de la segunda derivada.

Un alto porcentaje de alumnos pudo comprobar correctamente que $p=-4$ pero hubo también quienes partieron de la respuesta dada y trabajaron de atrás para adelante. Otros no utilizaron la información dada; partieron de la segunda derivada, integraron, y luego se dieron cuenta de que p era la constante de integración. Los alumnos que evaluaron la derivada en $x=2$ pero igualaron el resultado a 4 evidentemente no comprendían el concepto que se estaba evaluando. Pocos alumnos utilizaron el punto B, con coordenadas racionales.

Hubo muchos alumnos a los que les fue bien en la primera parte del apartado (c); pudieron integrar y hallar correctamente todos los términos, o algunos de ellos. Algunos tuvieron dificultades con las fracciones o cometieron errores con los signos; otros no usaron el valor $p=-4$ y, por ende, no pudieron hallar el tercer término en la integración. Fue muy común que los alumnos omitieran la constante de integración, o que la dejaran expresada, sin hallar su valor.

Pregunta 9

En general, los alumnos manejaron bien los apartados (a) y (b), o partes de ellos. Entre otros, los errores cometidos fueron: sumar las probabilidades a lo largo de las ramas, y tratar de usar la fórmula para la unión, tomada del cuadernillo de datos. En el apartado (b)(ii), muchos alumnos sabían que debían usar algún tipo de probabilidad condicional, pero no supieron hallar $\mathrm{P}(E|F)$. Muchos alumnos cometieron errores al operar con fracciones. Algunos alumnos que se equivocaron en el apartado (a)(ii) pudieron obtener puntos por coherencia (arrastre de error) en el apartado (b)(ii).

Muchos alumnos tuvieron dificultades para completar la tabla de distribución. Si bien el error común de dar la probabilidad de $x=3$ como $2/9$ resultaba comprensible, dado que el alumno podía no percibir que había dos maneras de pagar tres euros, resultó decepcionante que estos alumnos a menudo calcularan, correctamente, que $\mathrm{P}(X=4)$ era igual a $4/9$ y no se percataran de que la suma de las probabilidades no era 1. Estos alumnos no podían obtener la totalidad de los puntos disponibles por coherencia (arrastre de error) en el cálculo del valor esperado en el apartado (d). Hubo alumnos que sí usaron el dato de que la suma de las probabilidades es 1, tomando las probabilidades incorrectas que habían obtenido en el apartado (c); a menudo estos alumnos obtuvieron todos los puntos por arrastre de error en el apartado (d), ya que la mayoría sabía qué método aplicar para hallar el valor esperado.

Pregunta 10

Aquí también, muchos alumnos tuvieron dificultades para hallar los ángulos comunes en las ecuaciones trigonométricas. En el apartado (a), algunos no mostraron con suficiente detalle la resolución de las ecuaciones. Otros obtuvieron una solución única en (a)(i) y no hallaron otra. Algunos alumnos trabajaron en grados; la mayoría lo hizo en radianes.

Mientras que en el apartado (b) algunos alumnos hallaron la raíz a partir de la interpretación de la gráfica de la función original, la mayoría utilizó la resolución del apartado (a)(ii), a veces con arrastre de error.

En el apartado (c), la mayoría de los alumnos se dio cuenta de que era necesario integrar, pero fueron muchos menos los que pudieron desarrollar bien todo el procedimiento. Algunos no mostraron la sustitución de los límites, luego de presuponer, equivocadamente, que el valor de la integral en 0 sería 0; sin haber mostrado este desarrollo, no era posible obtener el punto correspondiente al cálculo de la integral en los límites. Nuevamente, muchos alumnos tuvieron dificultades para trabajar con los valores trigonométricos comunes.

En el apartado (d), si bien hubo alguna cuestión referida al enunciado de la pregunta, con respecto a los dominios dados, este no pareció preocupar a los alumnos. En general, este apartado fue bien resuelto; los alumnos emplearon una variedad de formas de describir la traslación horizontal de $\pi / 2$ hacia la derecha.

La mayor parte de los alumnos que abordaron el apartado (e) se dieron cuenta de que la integral era igual al valor que habían hallado en el apartado (c), pero la mayoría intentó integrar la función *g*, infructuosamente. Algunos alumnos usaron gráficas para hallar uno o ambos valores de p. El problema con el enunciado de la pregunta tampoco pareció afectar a los alumnos en este apartado.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

- Los alumnos necesitan mucha ejercitación en la justificación, la explicación y la comprobación de resultados dados, puesto que a muchos esto les resultó difícil en esta prueba.
- Algunos alumnos necesitan trabajar más la interpretación de derivadas.
- Los profesores deberían recalcar que los alumnos deben buscar conexiones entre los apartados de las preguntas. Esto es particularmente importante cuando la información dada puede ser utilizada para obtener puntos en un apartado subsiguiente, aun si el alumno no ha podido comprobar la información dada.
- Los alumnos deberían conocer los términos de examen utilizados en las preguntas; es decir, "escriba" significa que el resultado se puede hallar sin mostrar ningún procedimiento, mientras que "halle" indica que debe mostrarse un procedimiento.
- Los alumnos deben conocer las razones trigonométricas para los ángulos 0, $\pi / 2$, π etc.
- Los alumnos deben practicar suma y multiplicación de fracciones sin calculadora, y deberían saber usar el método más eficiente para el cálculo (por ejemplo, no buscar el denominador común cuando se multiplica). Se les debería asignar, periódicamente, ejercicios sin calculadora, a fin de mantener las habilidades aritméticas y algebraicas necesarias para la prueba 1.

Las áreas del examen que les resultaron particularmente difíciles a los alumnos, tal como se mencionó en la parte A de este informe, necesitan especial atención.

Prueba 2

Bandas de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 – 13	14 – 26	27 – 41	42 - 52	53 – 63	64 – 74	75 – 90

Áreas del programa y del examen que resultaron difíciles para los alumnos

- Para un número considerable de alumnos sigue siendo un desafío el uso de la calculadora de pantalla gráfica como instrumento para hallar información (es decir, desviación estándar, puntos máximos y mínimos, solución de una ecuación, el valor de una integral, etc.).

- Hallar un término determinado en el desarrollo de un binomio, en el que ambos términos son funciones de *x*.
- Relacionar razones de cambio con derivadas.
- Cuándo usar radianes y cuándo grados.
- Determinar el número de soluciones de una ecuación del tipo $f(x) = k$ a partir de la gráfica.
- Identificar los vectores que es preciso usar para hallar el ángulo entre dos rectas dadas en forma vectorial.
- Las aproximaciones.

Áreas del programa y del examen en que los alumnos demostraron estar bien preparados

Los colegios cubrieron bien el contenido del programa de la asignatura, y los alumnos demostraron buen manejo del tiempo. La mayoría abordó razonablemente bien todas las preguntas.

Se vieron procedimientos claros en problemas rutinarios tales como la pregunta 2.

Hubo buen manejo de las siguientes áreas:

- Comprensión de las progresiones aritméticas.
- Comprensión del álgebra vectorial básica.
- Dibujo aproximado de una función, a partir del uso de la calculadora gráfica.
- La trigonometría de sectores, arcos y triángulos.
- Cálculo de la media y de los valores de una tabla de datos.
- Uso de la regla del producto.

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1

La mayoría de los alumnos tuvo poca dificultad en hallar los valores de la tabla de distribución de frecuencias, pero a muchos no pareció resultarles natural utilizar la calculadora gráfica para calcular la media y la desviación estándar.

A menudo los alumnos hallaron el valor correcto de la media sin recurrir a las funciones estadísticas de la calculadora gráfica, pero un número importante no pudo hallar la desviación estándar.

Pregunta 2

Este problema fue bien resuelto por la inmensa mayoría de los alumnos. La mayoría de los estudiantes desarrolló su planteo y resolución de manera muy prolija y lógica, y obtuvo la máxima puntuación.

Pregunta 3

Si bien muchos alumnos resolvieron correctamente el apartado (a), fueron muchos menos los que identificaron la distribución binomial en la segunda parte del problema.

Aquellos que no obtuvieron la respuesta correcta en el apartado (a) muchas veces lograron algunos puntos ya sea por mostrar una tabla que representaba el espacio muestral o por anotar pares relevantes.

Pregunta 4

Aunque una gran cantidad de estudiantes se dio cuenta de que podía usar el teorema del binomio, fueron menos los que pudieron hallar el término en x^4.

Los alumnos evidenciaron diversas dificultades en la resolución de este problema:

- elegir un término equivocado
- intentar desarrollar $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^5$ a mano
- hallar sólo el coeficiente del término
- no poder determinar qué término derivaría en x^4
- errores en los cálculos del coeficiente

Pregunta 5

Esta pregunta fue bien resuelta por un buen número de alumnos.

En el apartado (a) se vieron muchas gráficas bien dibujadas, aunque un número significativo de alumnos o trabajó en grados o usó una función tal como $(\sin e)^x$. Hubo estudiantes que perdieron puntos por la deficiente calidad de sus diagramas. Por ejemplo, la forma de la curva era la correcta, pero el máximo y el mínimo no estaban indicados con precisión suficiente.

Hubo alumnos que lucharon en vano por resolver la ecuación del apartado (b) algebraicamente, en vez de recurrir a la calculadora. Aquellos que sí usaron la calculadora a menudo dieron respuestas mal aproximadas, lo cual sugiere que no sabían usar la función 'zero' ('root') de la calculadora, y hallaron una solución aproximada usando la función 'trace'.

En el apartado (c), muchas veces dieron la solución correcta, u obtuvieron puntos por arrastre de error a partir de resultados incorrectos del apartado (b).

Pregunta 6

Los apartado (a) y (b) fueron bien resueltos, en general; el principal problema fue el de las aproximaciones.

Muchos estudiantes no tenían la habilidad necesaria en el uso de la caculadora como para completar el apartado (c): no pudieron hallar el valor de la integral definida. Algunos intentaron hacerlo a mano.

Al tratar de explicar por qué la integral no era igual al área, la mayoría sabía que la región por debajo del eje *x* era la causa de que la integral no diera el área total, pero las explicaciones no fueron lo suficientemente claras. A menudo se afirmó que el área por debajo del eje era negativa, en lugar de que la integral era negativa.

Pregunta 7

Esta pregunta parece haberle resultado difícil a la gran mayoría de los alumnos.

El apartado (a) fue en general bien resuelto, pero en los apartados (b) y (c), los alumnos no tuvieron en cuenta que, tratándose de razones de cambio, debían usar la derivada. A la mayor parte de los alumnos se les escapó por completo, o no entendieron, que la pregunta pedía la razón de cambio instantánea, lo cual llevó a que usaran la ecuación original. Algunos intentaron hallar el promedio de la razón de cambio en el intervalo de tiempo dado, pero muy pocos intentaron usar la derivada.

Entre los que sí se dieron cuenta de que debían usar la derivada en (b), la inmensa mayoría la calculó a mano en lugar de recurrir a la calculadora.

La inecuación del apartado (c) fue a veces bien resuelta usando la función original, pero muchos alumnos no aproximaron sus respuestas al entero más próximo.

Pregunta 8

La mayoría de los alumnos demostró buenos conocimientos de trigonometría en esta pregunta. En general se desempeñaron bien en los apartados (a) y (c), y muchos, inclusive, en el apartado (b). Fueron menos los que pudieron resolver el apartado (d).

Muchos optaron por trabajar en grados en lugar de radianes, lo cual a menudo introdujo múltiples inexactitudes. Algunos trabajaron con un radio incorrecto de 6 o de 10.

Un buen número de alumnos supo cómo hallar el área de la región sombreada.

Sin embargo, el no poder trabajar en radianes y el poco manejo de las figuras significativas fueron problemas comunes. Los alumnos más flojos a menudo cometían el error de usar fórmulas del triángulo para los sectores o de usar grados en las fórmulas, en lugar de radianes.

Hubo muchas instancias de confusión entre líneas y arcos, para algunos alumnos. En (a), algunos tomaron 6 como la longitud de AC. En (d), algunos hallaron la longitud del arco EF en lugar de la longitud del segmento.

Varios estudiantes parecieron confundir el área del sector en (b) con la región sombreada.

Pregunta 9

Muchos alumnos demostraron tener buenos conocimientos de la ecuación vectorial de la recta y de su aplicación a un problema de cinemática, ya que resolvieron bien los dos primeros apartados de esta pregunta.

Algunos sabían que velocidad y distancia eran magnitudes de vectores, pero eligieron mal los vectores para el cálculo.

Muy pocos alumnos pudieron obtener las dos respuestas correctas en (c), aun después de haber planteado correctamente la ecuación. Se vio mucha álgebra retorcida y poca evidencia de uso de calculadora para resolver la ecuación. Muchos cometieron errores algebraicos simples, al combinar términos no equivalentes en el desarrollo del producto escalar (a menudo, escribían $8a$ en lugar de $8+a$) o de la magnitud (a menudo, escribían $5a^2$ en lugar de $5+a^2$).

Pregunta 10

Muchos alumnos hallaron correctamente las coordenadas *x* de P y de Q, en (a)(i), con la calculadora. En (a)(ii), algunos alumnos malinterpretaron las palabras “exactamente dos soluciones”, tomándolas como indicación de que debían hallar el discriminante de una cuadrática. Muchos no se percataron de que los valores de *k* que estaban buscando en esta ecuación eran las coordenadas *y* de los puntos hallados en (a)(i).

Muchos alumnos se mostraron inseguros en la aplicación de la fórmula para el producto, en la comprobación de la derivada dada de *g*. Se otorgó con frecuencia la máxima puntuación por la comprobación de que la derivada era la expresión dada, aunque en algunos casos no era fácil discernir si la demostración estaba basada en una real comprensión de las reglas del producto y de la cadena, o en un razonamiento en sentido inverso, a partir del resultado dado.

Algunos alumnos dibujaron la gráfica de la derivada, en (c), en los cuadernillos del examen, a pesar de las claras instrucciones que indicaban hacerlo en otra hoja. La mayoría de los que intentaron dibujar la gráfica en (c) lo hicieron bien, pero no se vieron demasiadas resoluciones correctas del apartado 10(d).

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

La calculadora es parte esencial de la prueba 2, y se espera que los alumnos la utilicen como primer recurso; sin embargo, esto aún no sucede, en el caso de un considerable número de alumnos. Es fundamental que los alumnos sepan decidir cuándo y por qué la calculadora es un instrumento útil. En esta prueba, la deberían usar por lo menos para:

- Trabajar con estadísticas
- Resolver integrales definidas
- Resolver ecuaciones. La calculadora no solo da las soluciones sino que también ayuda al alumno a visualizar la cantidad de soluciones.

- Dibujar aproximadamente una gráfica. En este caso los profesores deberían recalcar que las características fundamentales, tales como raíces, puntos máximos y mínimos, dominio y extremos deben ser bastante precisos.
- Utilizar una gráfica para obtener valores precisos de máximos, mínimos y raíces de una función. Es importante mostrarles a los alumnos que la opción “trace” de la calculadora solo da resultados aproximados para estos valores, a diferencia de las opciones que trae incorporadas para hallarlas con mayor precisión.

A menos que se los guíe al respecto, los alumnos seguirán eligiendo métodos analíticos, que a veces resultan infructuosos.

Es importante recalcar la necesidad de presentar los procedimientos con claridad; la Sección A en el cuadernillo del examen y la Sección B en las hojas rayadas.

Hace falta recalcar más la conexión entre derivadas y razones de cambio. Se necesita mucha más naturalidad en el uso de radianes y esto solo se consigue mediante la ejercitación con radianes y su relación con los grados.

La mayoría de los alumnos pierde puntos por no respetar el grado de aproximación pedido. Hace falta subrayar la diferencia entre 3 cifras significativas y 3 cifras decimales, así como la necesidad de evitar el redondeo prematuro en los cálculos.

Parece que muchos alumnos todavía no tienen claro qué “procedimiento” desarrollar en el examen, cuando usan la calculadora, por lo que muchas veces dedicaron tiempo precioso al desarrollo de métodos analíticos en problemas que se resolvían más eficientemente usando la calculadora. “Mostrar el procedimiento seguido” no significa realizar pasos u operaciones algebraicos. Más bien, lo que importa es mostrar el pensamiento matemático –el planteo–, antes de tomar la calculadora y dejar que la calculadora efectúe los cálculos. Todo aquello que fundamente la resolución y lleve el problema al “punto de intervención” de la calculadora, es lo que los alumnos deben mostrar a modo de procedimiento.

A fin de ayudar a los profesores y a los alumnos a entender mejor lo que esto significa en la práctica, se han adjuntado a este informe resoluciones modelo para la prueba 2. Al leer el esquema de corrección (*markscheme*) para la prueba 2, por favor tengan presente que cuando se incluyen métodos analíticos, es para informar a los examinadores sobre cómo deben otorgar puntos cuando los estudiantes toman este camino. No se debe inferir que estos son los métodos buscados o esperados.

22107310

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Jueves 6 de mayo de 2010 (mañana)

1 hora 30 minutos

Número de convocatoria del alumno

0	0								

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste **todas** *las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 7]*

En la siguiente tabla se muestran las calificaciones obtenidas por 120 alumnos en un examen.

Calificación	Número de alumnos	Frecuencia acumulada
1	9	9
2	25	34
3	35	p
4	q	109
5	11	120

(a) Halle el valor de

(i) p;

(ii) q. *[4 puntos]*

(b) Halle la media de las calificaciones. *[2 puntos]*

(c) Escriba el valor de la desviación típica. *[1 punto]*

(a) i $p = 34 + 35$

$p = 69$

ii $69 + q = 109$

$q = 40$

b media $= \frac{\Sigma fx}{120} = 3{,}16$

c d.t. $= 1{,}09$

2. *[Puntuación máxima: 6]*

Sea una progresión aritmética u_1, u_2, u_3..., donde $d = 11$ y $u_{27} = 263$.

(a) Halle u_1. *[2 puntos]*

(b) (i) Sabiendo que $u_n = 516$, halle el valor de n.

(ii) Para este valor de n, halle S_n. *[4 puntos]*

a) $263 = u_1 + 26 \cdot 11$

$u_1 = -23$

b) i) $516 = -23 + 11(n-1)$

$n = 50$

ii) $S_{50} = \frac{50}{2}(-23 + 516)$

$= 12325$

3. *[Puntuación máxima: 5]*

Jan inventa un juego, que consiste en tirar dos dados equilibrados de 6 caras. Gana un premio si, al sumar las puntuaciones que saca con cada dado, el total es igual a 5.

(a) Jan tira los dos dados una vez. Halle la probabilidad de que gane un premio. *[3 puntos]*

(b) Jan tira los dos dados 8 veces. Halle la probabilidad de que gane 3 premios. *[2 puntos]*

a) sumar 5 (1,4) (4,1) (2,3) (3,2)

$P(\text{premio}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

b) $X \sim B(8, \frac{1}{9})$

$P(X=3) = 0{,}0426$

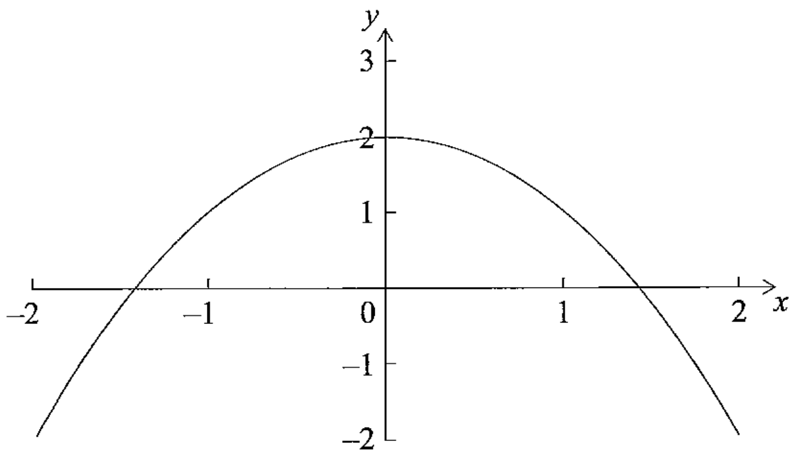
4. *[Puntuación máxima: 6]*

Halle el término en x^4 del desarrollo de $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^5$.

$\binom{5}{2}(3x^2)^3\left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 1080x^4$

5. *[Puntuación máxima: 7]*

Sean $f(x)=2-x^2$, para $-2\leq x\leq 2$ y $g(x)=\operatorname{sen} e^x$, para $-2\leq x\leq 2$. A continuación se muestra la gráfica de f.



(a) En el diagrama anterior, dibuje aproximadamente la gráfica de g. *[3 puntos]*

(b) Resuelva $f(x)=g(x)$. *[2 puntos]*

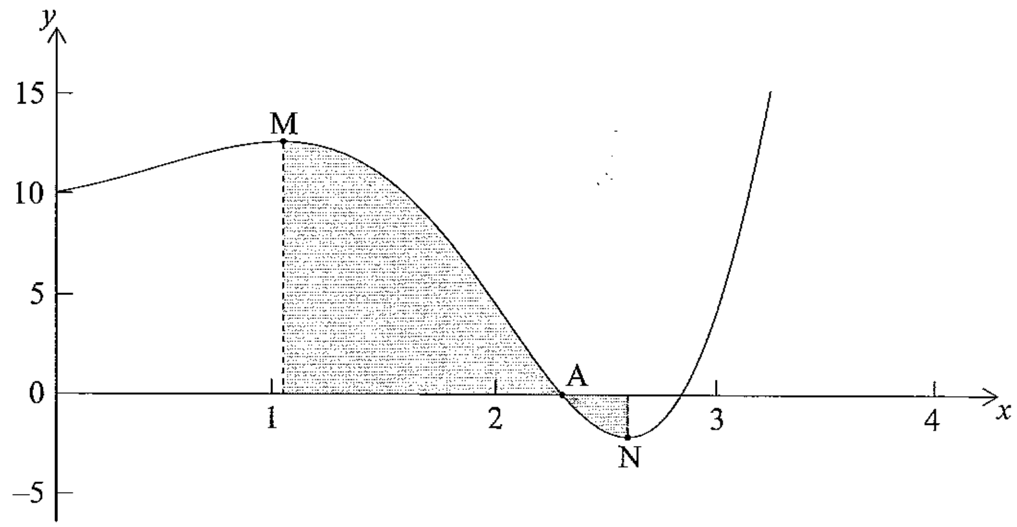
(c) Escriba el conjunto de valores de x tales que $f(x)>g(x)$. *[2 puntos]*

b) $x = -1,32$ $x = 1,68$

c) $-1,32 < x < 1,68$

6. *[Puntuación máxima: 6]*

Sea $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x + 10$, para $0 \le x \le 4$. La figura que aparece a continuación muestra una parte de la gráfica de f.



Hay una intersección con el eje x en el punto A, un máximo local en el punto M, en el $x = p$, y un mínimo local en el punto N, en el que $x = q$.

(a) Escriba la coordenada x del punto A. *[1 punto]*

(b) Halle el valor de

(i) p;

(ii) q. *[2 puntos]*

(c) Halle $\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x$. Explique por qué este valor no es el área de la región sombreada. *[3 puntos]*

a) 2,31

b) i) 1,02

ii) 2,59

c) $\int_p^q f(x)dx = 9,96$

7. *[Puntuación máxima: 8]*

El número n de bacterias que hay en un plato en el instante t minutos viene dado por $n = 800e^{0,13t}$.

(a) Halle el valor de n para $t = 0$. *[2 puntos]*

(b) Halle la tasa de variación a la que está aumentando n en el instante $t = 15$. *[2 puntos]*

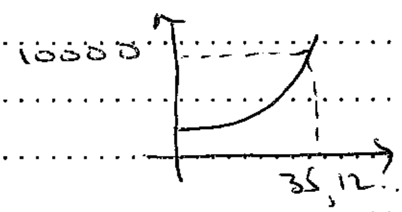
(c) Transcurridos k minutos, la tasa de incremento de n es mayor que 10 000 bacterias por minuto. Halle el valor mínimo de k, donde $k \in \mathbb{Z}$. *[4 puntos]*

a) $n = 800 \cdot e^{0,13 \times 0}$

$= 800$

b) $n'(15) = 731$

c) $n'(t) > 10000$



$k > 35,12$

Valor mínimo es 36

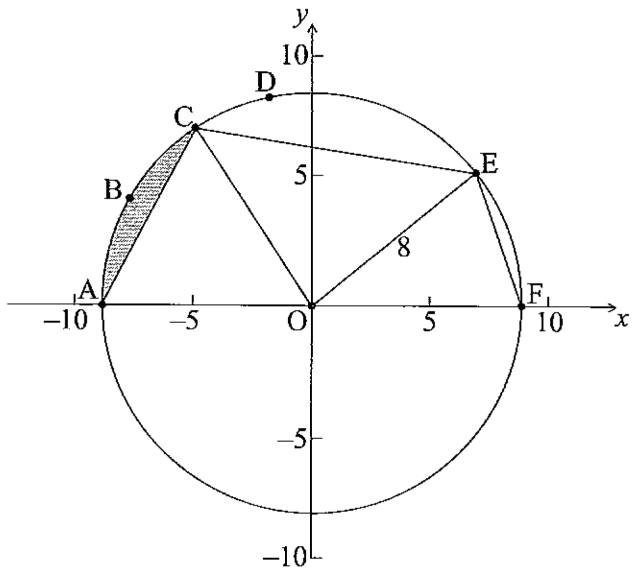
NO escriba en esta página.

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

8. *[Puntuación máxima: 15]*

La siguiente figura muestra una circunferencia de centro O y radio 8 cm.



la figura no está dibujada a escala

Los puntos A, B, C, D, E y F pertenecen a la circunferencia, y [AF] es un diámetro.
La longitud del arco ABC es de 6 cm.

(a) Halle el valor del ángulo AOC. *[2 puntos]*

(b) A partir de lo anterior, halle el área de la región sombreada. *[6 puntos]*

El área del sector circular OCDE es de 45 cm^2.

(c) Halle el valor del ángulo COE. *[2 puntos]*

(d) Halle EF. *[5 puntos]*

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Candidate session number / Numéro de session du candidat / Número de convocatoria del alumno								
0	0							

Sheet number / Feuille n° / Hoja núm.		

ANSWER SHEET
FEUILLE DE RÉPONSES
HOJA DE RESPUESTAS

Please complete the boxes/Veuillez remplir les cases/Llene los recuadros

Question / Question / Pregunta

Examiner / Examinateur / Examinador

(8) (a) $6 = 8\theta$

$\hat{AOC} = 0{,}75$

(b) área del sector $= \frac{1}{2} \cdot 0{,}75 \cdot 8^2 = 24 \text{ cm}^2$

área Δ AOC $= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 0{,}75$
$= 21{,}8\ldots \text{ cm}^2$

región sombreada $= 2.19 \text{ cm}^2$

(c) $45 = \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot \theta$

$\hat{COE} = 1{,}40625$

(d) $\hat{EOF} = \pi - 1{,}40625 - 0{,}75 = 0{,}985\ldots$

$EF = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos \hat{EOF}}$
$= 7{,}57 \text{ cm}$

AB0102

NO *escriba en esta página.*

9. *[Puntuación máxima: 16]*

En esta pregunta, las distancias vienen dadas en metros.

Los aviones de juguete vuelan en línea recta y a velocidad constante. El Avión 1 pasa por un punto A. Su posición, p segundos después de haber pasado por A, viene dada por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) (i) Escriba las coordenadas de A.

(ii) Halle la velocidad del avión en ms^{-1}. *[4 puntos]*

(b) Después de siete segundos, el avión pasa por un punto B.

(i) Halle las coordenadas de B.

(ii) Halle la distancia que ha recorrido el avión durante estos siete segundos. *[5 puntos]*

(c) El Avión 2 pasa por un punto C. Su posición, q segundos después de pasar por C, viene dada por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$.

El ángulo que forman las direcciones de vuelo del Avión 1 y del Avión 2 es de $40°$. Halle los dos valores de a. *[7 puntos]*

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

ANSWER SHEET
FEUILLE DE RÉPONSES
HOJA DE RESPUESTAS

Candidate session number / Numéro de session du candidat / Número de convocatoria del alumno								
0	0							

Sheet number / Feuille n° / Hoja núm.		

Please complete the boxes/Veuillez remplir les cases/Llene los recuadros

Question / Question / Pregunta

Examiner / Examinateur / Examinador

(9) (a) (i) $(3, -4, 0)$

(ii) vector velocidad $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

velocidad $= \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2}$

$= 3{,}74$

(b) (i) $B = (-3, -4, 0) + 7 \cdot (-2, 3, 1)$

$B = (-11, 17, 7)$

(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad AB^2 = (-14)^2 + 21^2 + 7^2$

distancia $= 26.2$

(c) ángulo $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$

$a \cdot b = ab\cos\theta$

$\left|\begin{matrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right| = \sqrt{14}$, $\left|\begin{matrix} -1 \\ 2 \\ a \end{matrix}\right| = \sqrt{a^2+5}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} = a+8$

$\cos 40° = \dfrac{a+8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{a^2+5}}$

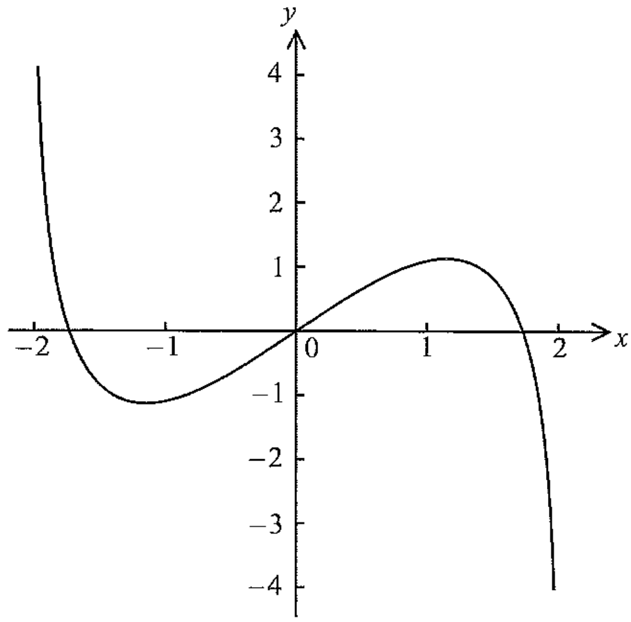
$a = 3{,}21$, $a = -0{,}990$

AB0102

***NO** escriba en esta página.*

10. *[Puntuación máxima: 14]*

Considere $f(x) = x\ln(4-x^2)$, para $-2 < x < 2$. A continuación se muestra la gráfica de f.



(a) Sean P y Q puntos pertenecientes a la curva de f en los cuales la tangente a la gráfica de f es paralela al eje x.

(i) Halle la coordenada x de P y de Q.

(ii) Considere $f(x) = k$. Escriba todos los valores de k para los cuales existen exactamente dos soluciones. *[5 puntos]*

Sea $g(x) = x^3\ln(4-x^2)$, para $-2 < x < 2$.

(b) Compruebe que $g'(x) = \dfrac{-2x^4}{4-x^2} + 3x^2\ln(4-x^2)$. *[4 puntos]*

(c) Dibuje aproximadamente la gráfica de g'. *[2 puntos]*

(d) Considere $g'(x) = w$. Escriba todos los valores de w para los cuales existen exactamente dos soluciones. *[3 puntos]*

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Candidate session number / Numéro de session du candidat / Número de convocatoria del alumno								
0	0							

Sheet number Feuille n° Hoja núm.		

ANSWER SHEET
FEUILLE DE RÉPONSES
HOJA DE RESPUESTAS

Please complete the boxes/Veuillez remplir les cases/Llene los recuadros

Question Question Pregunta

Examiner Examinateur Examinador

(10) (a) (i) $-1{,}15, \quad 1{,}15$

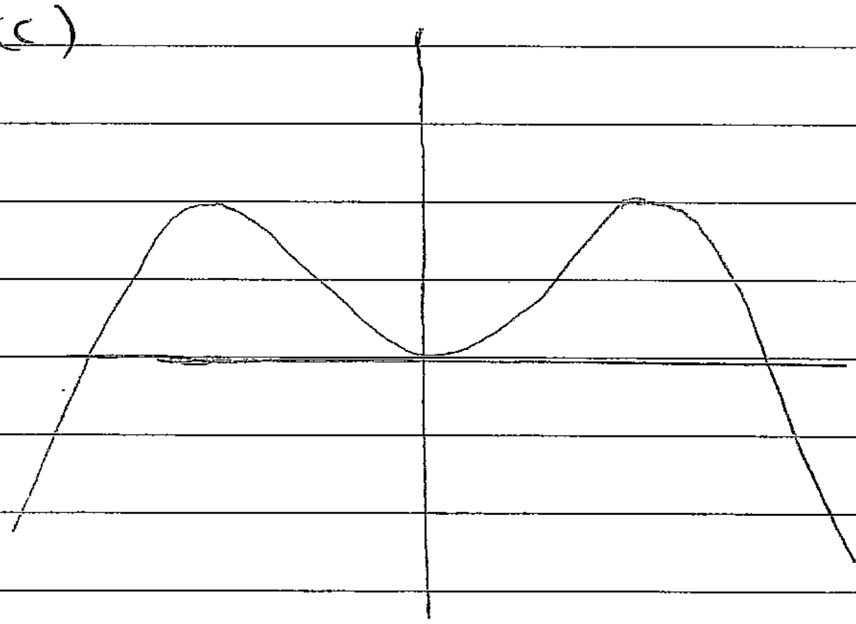
(ii) $k = -1{,}13, \quad k = 1{,}13$

(b) $g'(x) = (x^3)' \cdot \ln(4-x^2) + x^3 [\ln(4-x^2)]'$

$= 3x^2 \cdot \ln(4-x^2) + x^3 \cdot \dfrac{1}{4-x^2} \cdot (-2x)$

$= 3x^2 \ln(4-x^2) - \dfrac{2x^4}{4-x^2}$

(c)



(d) $\omega = 2{,}69, \quad \omega < 0$

AB0102