MATEMÁTICAS NM

Bandas de calificación de la asignatura

Nivel medio

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 – 15	16 - 29	30 - 43	44 - 54	55 - 66	67 - 78	79 - 100

Variantes regionales de las pruebas de exámenes

Con el fin de proteger la integridad de los exámenes, se está haciendo cada vez más uso de las variantes regionales de los exámenes. El uso de estas variantes del mismo examen implica que los estudiantes de una región del mundo no siempre estarán rindiendo la misma prueba que los estudiantes de otra región. Se aplica un riguroso proceso para asegurar que las pruebas sean comparables en cuanto a su nivel de dificultad y al contenido que evalúan, y se toman medidas para garantizar la aplicación de los mismos estándares en la evaluación de los exámenes correspondientes a las diferentes versiones de las pruebas. Para la convocatoria de mayo de 2008, el BI ha elaborado variantes regionales de las pruebas de Matemáticas NM.

Evaluación interna

Bandas de calificación del componente

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 – 7	8 - 13	14 - 19	20 - 23	24 - 28	29 - 33	34 - 40

Ámbito que cubre el trabajo entregado y medida en que fue apropiado

Los profesores deberían tener presente que las tareas nuevas para ser usadas desde la convocatoria de mayo 2009 a la de noviembre 2010 se encuentran disponibles en el Centro Pedagógico en línea (CPEL). Además, a partir de mayo de 2009, **no** se aceptarán tareas tomadas de ediciones previas del *Material de ayuda al profesor* como parte de la carpeta. Se puede acceder a las tareas nuevas en

http://occ.ibo.org/ibis/documents/dp/gr5/mathematics_sl/d_5_matsl_tsm_0801_1_s.pdf

En esta convocatoria los moderadores han notado que la mayoría de los colegios optó por asignar tareas elegidas del *Material de ayuda al profesor*. En general, los estudiantes han tenido un buen rendimiento: aproximadamente dos tercios de los alumnos obtuvieron una puntuación de 5 o más. Es de suponer que estos resultados reflejan una mayor seguridad por parte de los profesores en la aplicación de la carpeta y en su evaluación. Si bien persisten algunos problemas, hubo evidencia de mejor comprensión de los niveles de logro de los criterios de evaluación.

Las tareas tomadas de otros recursos pedagógicos y las tareas diseñadas por los profesores deben ser cuidadosamente revisadas, para asegurarse de que cumplen satisfactoriamente con los requerimientos de las tareas, tal como se describen en la guía de la asignatura, y de que les ofrezcan a los alumnos plena oportunidad de alcanzar los niveles más altos de todos los criterios. No hacerlo conlleva el riesgo de severas penalizaciones que pueden tener graves consecuencias en el logro de todos los alumnos del colegio. Es crucial que los profesores resuelvan cualquier tarea que se propongan utilizar antes de asignarla a los alumnos, para asegurarse de que brinda suficiente margen de oportunidad para que sus alumnos tengan acceso a todos los niveles de los criterios.

Rendimiento alcanzado por los alumnos en cada uno de los criterios

Criterio A (Notación y terminología):

La mayoría de los estudiantes usó notación correcta y apropiada en su trabajo, pero sin embargo el uso de notación de calculadora (por ejemplo *, ^ , 10E4, etc.) sigue siendo un problema. Algunos estudiantes usaron $'y'$ repetidas veces como variable dependiente de múltiples funciones y para representar diferentes cantidades (por ejemplo, en *Distancias de frenado*). Esto puede derivar en una relación absurda para la distancia total de frenado, $'y+y=y'$, o cosas del estilo. La función correspondiente a cada modelo debería identificarse claramente, mediante subíndices o de alguna otra manera.

Criterio B (Comunicación):

Se observó una mejora en la presentación del trabajo y en el rotulado de gráficas. Se recuerda a los profesores que los estudiantes deben rotular como corresponde todas las gráficas, aun cuando las limitaciones del *software* utilizado obligaran a hacerlo a mano. Si bien no se exige el uso de un procesador de texto para realizar el trabajo, sí se lo considera un elemento positivo. En este caso, se les debería enseñar a los estudiantes a usar el editor de ecuaciones del *software* correspondiente, de la misma manera en que deberían ser entrenados en el uso creativo y eficaz del *software* graficador.

Algunos cometen el error de encarar las tareas como si fueran deberes escolares y presentan las respuestas en un formato de "pregunta y respuesta". La intención es que la carpeta desarrolle la habilidad de comunicar ideas matemáticas a través de un texto que fluya bien. El formato de pregunta / respuesta es por lo tanto inapropiado y debería ser penalizado. En general, las tareas deberían ser lo suficientemente prescriptivas como para guiar a los alumnos, pero no tan prescriptivas como para constituir un conjunto de ejercicios cerrados. La tarea debería, en sí misma, proveer el margen necesario para poder explorar, modificar, considerar la precisión y la razonabilidad, e interpretar.

Criterio C (Procedimientos matemáticos - Tipo I):

El rendimiento aquí en general fue bueno, y muchos estudiantes lograron una buena puntuación. Es importante mostrar suficiente cantidad de evidencia y de análisis. Los estudiantes que llegan a una proposición general sin acompañarla de evidencia que la fundamente adecuadamente no pueden lograr una puntuación alta en este criterio.

A muchos les resultó difícil llegar al C5 por no entender cómo validar su proposición general. Lo que se pretende es que los alumnos consideren el proceso matemático y comparen los resultados de valores de prueba, con los resultados obtenidos a través de su proposición general. La simple sustitución de valores de n en la proposición, para llegar a un resultado, no constituye validación adecuada.

Criterio C (Procedimientos matemáticos - Tipo II):

Uno de los aspectos más importantes en la búsqueda de un modelo es identificar correctamente las variables adecuadas (aquellos valores que cambian debido a la naturaleza de la situación y/o a la relación entre las cantidades o mediciones). Esto ha sido resaltado en los informes de asignatura y en los documentos de ayuda para la evaluación interna desde hace muchos años. Sin embargo, una gran cantidad de carpetas todavía no encaran correctamente este tema. Si bien los moderadores aceptarán muchas indicaciones implícitas de la definición de variables, no hay nada que reemplace una clara afirmación del tipo "Sea t el tiempo en horas y sea C la cantidad en kg". Asimismo, es mucho mejor que los alumnos usen variables que tengan sentido en el contexto del problema. Usar t para el tiempo o C para una cantidad ayuda a darle un marco a la función del modelo y a focalizar cualquier discusión que haga referencia a estas variables.

De la misma manera, se deben definir correcta y explícitamente los parámetros (un parámetro es un valor que uno puede cambiar, pero que una vez cambiado permanece en ese valor hasta tanto el diseñador del modelo lo vuelva a cambiar) y las restricciones (las limitaciones reales o potenciales que actúan sobre las variables y los parámetros). Por ejemplo, en la función $C(t) = at^2$ el parámetro a influirá en la tasa de crecimiento de la cantidad C, y dado que la función del modelo representa el crecimiento a medida que aumenta el tiempo, debe tener un valor > *0* y *t* debe ser ≥ 0.

Otro punto focal del criterio C es el del análisis de datos en el desarrollo de una función modelo. Se pretende que el análisis incorpore las habilidades y los conocimientos matemáticos que los alumnos han aprendido durante el curso. Usar las funciones de regresión de una calculadora o de una computadora como herramienta primaria en el desarrollo del modelo soslaya el análisis matemático. La puntuación máxima que se puede otorgar en estos casos es C2. La regresión puede usarse, por supuesto, para confirmar o comparar **después** de haber desarrollado el modelo "a mano".

El nivel C4 del criterio considera la bondad de ajuste de la función del modelo a los datos originales. De aquí que las tareas que no utilizan estos datos no pueden lograr este nivel. Si bien existen muchos buenos problemas en los que la función del modelo se desarrolla usando métodos analíticos, estos no son apropiados para ser usados como tareas de la carpeta.

Criterio D (Resultados - Tipo I):

El resultado esperado luego de la exploración de un comportamiento matemático es una proposición general que le permita a uno determinar un resultado específico en cualquier punto del proceso. Lo más frecuente es que esto implique hallar una expresión que permita determinar directamente el término general, el enésimo, del proceso. Puede también involucrar una descripción del efecto general que produce el cambio de parámetros en una expresión / función matemática, o el resultado final de un proceso con valores / formas / expresiones iniciales dados.

Los niveles de logro más altos en el criterio D para tareas de Tipo I requieren que los alumnos hayan explorado adecuadamente el alcance y las limitaciones de la proposición general y que brinden una explicación informal de sus resultados. Los profesores tendrán sus propias expectativas acerca de cuán lejos debe llegar el alumno para explorar adecuadamente el alcance y las limitaciones, y estas deberían ser informadas al moderador. Es probable que los alumnos necesiten ser guiados en cuanto a lo que constituye una explicación informal. Esta podría consistir en una presentación lógica, algebraica o geométrica, o en algún otro argumento convincente. La presentación de ejemplos, solamente, no constituye tal argumento.

Criterio D (Resultados - Tipo II):

Para lograr un buen nivel en este criterio, los alumnos deben considerar la precisión y la razonabilidad de **su(s)** funcion(es) del modelo en el contexto de la situación. La discusión acerca de los aspectos matemáticos tales como intersecciones con los ejes, asíntotas, pendientes, máximos y mínimos, etc., debe reformularse para incorporar consideraciones reales acerca de factores tales como la velocidad, la distancia, la hora del día, el valor mayor, el comportamiento en el largo plazo, etc. Muchos alumnos brindaron una buena discusión **matemática,** pero perdieron el norte en lo que se refiere al significado real de la tarea, y consiguientemente obtuvieron un máximo de D2. La interpretación debería abordar el tema del equilibrio esencial entre la precisión (es decir, ¿cuán eficiente puedo lograr que sea?) y la razonabilidad (es decir, ¿cuánta eficiencia es razonable pretender?). La aplicación de la función del modelo debería incluir modificaciones apropiadas al modelo original.

Criterio E (Uso de medios tecnológicos):

Los moderadores han expresado preocupación porque los profesores no les están informando de las circunstancias que atañen a la disponibilidad de tecnología ni de las expectativas que tienen acerca de su uso. Sin esta información puede llegar a resultarles imposible a los moderadores confirmar las puntuaciones otorgadas por los profesores.

En las tareas de Tipo I puede resultar difícil encontrar maneras creativas y eficaces de usar la tecnología. Podría resultar apropiado el uso de planillas de cálculo o las opciones de “función secuencial” o de gráficas que sustenten el análisis de patrones en el comportamiento matemático. En todas las tareas, las gráficas generadas por computadora o por calculadora no constituyen en sí mismas un uso eficaz de los medios tecnológicos. Los profesores deberían considerar cómo se podría mejorar la presentación de la solución mediante la representación de muchas gráficas o múltiples gráficas en el mismo sistema de ejes.

Criterio F (Calidad del trabajo):

La mayoría de los profesores advirtió que los alumnos que habían completado la mayor parte de la tarea razonablemente bien se habían esforzado satisfactoriamente y otorgaron, correctamente, una puntuación de F1. Sin embargo, los alumnos que completan todos los requerimientos de la tarea sin demostrar ni percepción excepcional ni procedimiento sobresaliente también deberían recibir F1. Rara vez debería otorgarse la puntuación de F2: en aquellos casos en los que el profesor se detiene a admirarse porque el trabajo presentado refleja un grado superior de percepción o de comprensión. Una puntuación de F0 debería reservarse para trabajos totalmente inadecuados.

Sugerencias y recomendaciones para la enseñanza de alumnos futuros

Los profesores deberían repasar los criterios de evaluación con sus alumnos antes de asignar cada tarea. En lugar de puntualizar las expectativas para una tarea en particular, el profesor puede abordar las expectativas generales en cuanto al buen uso de notación, a la buena comunicación, a la esencia de un buen análisis e interpretación, al uso eficaz de la tecnología y a lo que se espera con respecto a la calidad del trabajo.

Los profesores deberían agregar comentarios sobre el trabajo a medida que lo corrigen, a modo de devolución para el alumno y para informar al moderador acerca de cómo se otorgó determinada puntuación. Los comentarios resumidos en el formulario 5/PFCS o en el Formulario B (que se encuentra en el *Material de ayuda al profesor*) también sirven para informar a los moderadores. Cuanto mejor pueda explicar el profesor por qué ha otorgado determinada puntuación, más probable será que sus puntuaciones sean confirmadas en la moderación.

Se recuerda a los profesores que las instrucciones específicas referidas a la evaluación de las carpetas, que incluyen comentarios sobre los criterios, que explican mejor su aplicación, están disponibles en varios documentos en el CPEL. Los siguientes enlaces pueden resultarles útiles:

http://occ.ibo.org/ibis/documents/dp/gr5/mathematics_sl/d_5_matsl_gui_0805_1_s.pdf

http://occ.ibo.org/ibis/documents/dp/gr5/mathematics_sl/d_5_matsl_int-ass_0611_1_s.pdf

http://occ.ibo.org/ibis/documents/dp/gr5/mathematics_sl/d_5_matsl_tsm_0509_1_s.pdf

Evaluación externa

Bandas de calificación del componente

Prueba 1

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 11	12 – 22	23 - 33	34 – 44	45 - 55	56 - 66	67 - 90

Prueba 2

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 14	15 – 29	30 - 42	43 – 52	53 - 63	64 - 73	74 - 90

Generalidades

Esta fue la primera convocatoria del modelo nuevo de evaluación, en el que la prueba 1 no permite el uso de calculadora alguna y la prueba 2 requiere el uso de una calculadora de pantalla gráfica. Los alumnos no parecieron encontrar mayores dificultades en la resolución de la prueba 1 sin calculadora, con la excepción, posiblemente, de la pregunta 4.

Sin embargo, parece que muchos alumnos todavía no tienen claro qué “procedimiento” mostrar por escrito en el examen cuando usan la calculadora, por lo cual muchas veces dedicaron minutos preciosos al desarrollo de métodos analíticos en problemas que se resolvían más eficientemente usando la calculadora. “Mostrar el procedimiento” no significa desarrollar pasos y operaciones algebraicos. Más bien, lo importante es mostrar el pensamiento matemático, el planteo, previo al momento de tomar la calculadora, para luego dejar que la calculadora realice los cálculos. Lo que los alumnos deben mostrar a modo de procedimiento son todos los pasos que fundamenten la respuesta, llevando el problema hasta el “punto de intervención” de la calculadora.

A fin de ayudar a los profesores y a los alumnos a entender con mayor claridad lo que esto significa en la práctica, se adjuntan a este informe resoluciones modelo para la prueba 2. Al leer el criterio de corrección (*markscheme*) para la prueba 2, por favor tengan presenten que cuando se incluyen métodos analíticos es para informar a los examinadores acerca de cómo deben otorgar puntos cuando los estudiantes toman este camino. No se debe inferir que estos son los métodos buscados o esperados.

Hubo estudiantes que no entregaron en forma correcta su examen. En la Sección A, todo el procedimiento debería desarrollarse en el cuadernillo del examen. Sin embargo, toda la Sección B debe ser resuelta en papel rayado que luego será sujetado a continuación del cuadernillo. Un gran número de estudiantes también mostró partes de la resolución en la Sección B del cuadernillo y esto hizo que se les dificultara a los examinadores saber qué resolución corregir. Nótese que los estudiantes deben usar lapicera o bolígrafo en los exámenes.

Prueba 1

Áreas del programa y del examen que parecen haber resultado difíciles para los estudiantes

- Las funciones trigonométricas en general y específicamente el uso de identidades.
- Brindar suficiente evidencia matemática para fundamentar una conclusión.
- Las propiedades de las integrales definidas.

- Probabilidades a partir de una tabla de contingencia.
- El uso correcto de las derivadas en los problemas de máximos y mínimos.

Áreas del programa o del examen en que los estudiantes demostraron estar bien preparados

Los alumnos parecieron manejarse bastante bien sin las calculadoras y mostraron particular competencia en las siguientes áreas:

- Las funciones cuadráticas y sus gráficas.
- Estadística elemental y el uso de tablas de frecuencias.
- Hallar determinantes e inversas de matrices.
- Algebra vectorial básica y el uso del producto escalar.

Puntos fuertes y débiles de los estudiantes al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1: Frecuencias, mediana y cuartiles

Parece haber habido buena comprensión de frecuencias y de mediana, no así de cuartiles y de rango intercuartil. Algunos alumnos, probablemente sobre la base de exámenes anteriores, dibujaron diagramas de frecuencias acumuladas y obtuvieron respuestas ligeramente diferentes para la mediana y los cuartiles.

Pregunta 2: Gráficas de funciones cuadráticas

Esta pregunta fue, sistemáticamente, la que mejor se resolvió en todo el examen.

Pregunta 3: Determinante e inversa de matriz con aplicación a la resolución de ecuaciones

La mayoría de los estudiantes pudo hallar el determinante y la inversa de una matriz de $2x2$, aunque bastantes dieron $\frac{1}{ad-bc}$ como el valor del determinante. Los estudiantes de mayor habilidad sabían cómo usar la inversa para resolver un sistema de ecuaciones, pero otros colocaron la inversa a la derecha o recurrieron a una resolución algebraica; en ambos casos, no obtuvieron ningún punto en el apartado (c).

Pregunta 4: Valores de funciones trigonométricas de ángulos obtusos usando identidades

La resolución de esta pregunta fue muy floja, y pareció haber una clara falta de manejo de identidades trigonométricas básicas y de los valores de funciones trigonométricas de ángulos obtusos. Los estudiantes que reconocieron la necesidad de usar una identidad para hallar $\cos 2A$ dado $\cos A$, pocas veces eligieron la más apropiada de las tres y aun en el caso de que sí lo hicieran, muchas veces la usaron incorrectamente, con expresiones del tipo $2\cos^2 \frac{1}{9} - 1$.

Pregunta 5: Transformaciones de gráficas de funciones

Esta pregunta fue razonablemente bien resuelta. Muchos reconocieron la gráfica de $-f(x)$ como una simetría en una recta horizontal, pero fueron menos los que se dieron cuenta de que el eje de simetría era el eje *x*. Unos cuantos obtuvieron $g(-3) = f(0)$, pero no llegaron a $f(0) = -1.5$. La mayoría de los estudiantes se dio cuenta de que un movimiento de la gráfica de $f(x)$, 3 unidades hacia la izquierda, generaba la gráfica de $g(x)$, pero el lenguaje usado para describir la transformación distaba muchas veces de ser preciso desde el punto de vista matemático.

Pregunta 6: Probabilidades a partir de una tabla de contingencia

Muchos estudiantes tuvieron dificultades con esta pregunta, generalmente como consecuencia de haber intentado resolver el problema por fórmula en lugar de mirar detenidamente las frecuencias en la tabla. Un error muy común en el apartado (b) fue suponer que las probabilidades eran idénticas en cada selección, en lugar de probabilidades dependientes sin reposición.

Pregunta 7: Propiedades de integrales definidas

La resolución de esta pregunta dejó mucho que desear. Muy pocos estudiantes dieron una justificación válida en el apartado (a): un error común fue escribir $\int_1^5 f(x)dx = f(5) - f(1)$.

Lo que se buscaba era que $\int_1^5 3f(x)dx = 3\int_1^5 f(x)dx$ y $\int_5^1 f(x)dx = -\int_1^5 f(x)dx$.

En el apartado (b) hubo problemas similares: fueron poco frecuentes tanto la combinación de límites como la separación de integrales. Un error común fue considerar a $f(x)$ como 1 en lugar de partir de $\int_1^5 f(x)dx = 4$ para luego escribir $\int_1^5 (x + f(x))dx = [x+1]_1^5$.

Pregunta 8: Vectores

Esta pregunta fue bien resuelta por muchos estudiantes. La mayoría obtuvo las respuestas correctas para $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$, y la mayor parte de los estudiantes utilizó correctamente el producto escalar para comprobar que $k = 7$. Surgió alguna confusión en la sustitución de $k = 7$ en $\overrightarrow{AD}$, pero aparte de esto, el apartado (c) fue bien resuelto, si bien la determinación del vector posición de C presentó mayor dificultad. Siendo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ perpendiculares, no había ningún problema en usar estos dos vectores para llegar a $\cos A\hat{B}C = 0$, y la mayoría de los estudiantes que resolvieron el apartado (d) hicieron precisamente esto.

Pregunta 9: Funciones trigonométricas y volumen de revolución

Esta pregunta no fue bien resuelta por la mayoría de los estudiantes. Menos de la tercera parte pudo dar correctamente el recorrido de $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ y pocos pudieron brindar una justificación adecuada para la existencia de exactamente una solución de $f(x) = 1$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. El cálculo de la derivada de esta función también generó importantes problemas, lo cual complicó la resolución del apartado (c). A pesar de que la fórmula del volumen de revolución figura en el cuadernillo de información, menos de la mitad de los estudiantes pudieron reemplazar correctamente la función y los límites en $\pi\int_a^b y^2 dx$ y menos todavía fueron los que pudieron elevar $\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos^{1/2} x$ al cuadrado correctamente. Entre aquellos que sí pudieron hacerlo, muchos no identificaron la antiderivada correspondiente. Hubo sugerencias de lo más variadas en cuanto a antiderivadas alternativas posibles.

Pregunta 10: Triángulos en un semicírculo

La mayoría de los estudiantes pudo determinar que el área del triángulo OPB era igual a $2\operatorname{sen}\theta$, aunque con bastante frecuencia se dio 2θ como valor del área. La justificación de por qué las áreas de los dos triángulos eran iguales se hizo muy mal. Los menos usaron la igualdad de senos de ángulos suplementarios y frecuentemente se usó el término *complementario* en lugar de *suplementario*. Solo un puñado de estudiantes usó el argumento sencillo de igual base y altura. Muchos estudiantes parecieron entender por qué $S = 2(\pi - 2\operatorname{sen}\theta)$ pero en muchos casos los argumentos presentados para comprobar por qué este resultado era válido no fueron muy convincentes. Muchas veces faltaba la evidencia explícita de por qué el área del semicírculo era 2π, así como también una explicación para $2(2\operatorname{sen}\theta)$ y para la resta.

Solo unos pocos estudiantes reconocieron el hecho de que S alcanzaría un mínimo cuando $\operatorname{sen}\theta$ tomara su valor máximo, lo cual llevaba a una resolución sencilla que no requería de conceptos de análisis matemático. Aquellos que optaron por el camino del análisis muchas veces tuvieron dificultades para hallar la derivada de S; un número importante no reconoció que la derivada de una constante es 0, y recurrieron incluso a la laboriosa aplicación de la regla del producto para hallar esta sencilla derivada. A la hora de justificar el mínimo, en algunos casos se vio evidencia de que se estaba usando algún criterio válido, pero la explicación del criterio usado, en general, no fue satisfactoria. A los estudiantes que resolvieron correctamente el apartado (d), en general les fue bien también en el apartado (e), aunque frecuentemente se vieron respuestas que no pertenecían al dominio de θ.

Recomendaciones y orientaciones para la enseñanza de futuros estudiantes

- Parecería que sería beneficioso que se pusiera mayor énfasis en todos los aspectos de la trigonometría.
- También es recomendable intensificar la práctica de problemas que piden suficiente evidencia matemática para fundamentar una conclusión.
- Es preciso que los alumnos comprendan que no deben "tomar atajos" en las resoluciones de las preguntas del tipo "compruebe que..."
- También sería bueno desarrollar mayor comprensión de las propiedades de las integrales definidas y de la lógica que sustenta los criterios para determinar máximos, mínimo y puntos de inflexión.

Prueba 2

Áreas del programa y del examen que parecen haber resultado difíciles para los estudiantes

Los estudiantes tuvieron dificultades en la resolución de preguntas sobre:

- Distribuciones normales
- Probabilidad binomial
- Ecuaciones trigonométricas
- Integración y área

Áreas del programa o del examen en que los estudiantes demostraron estar bien preparados

Los estudiantes demostraron un buen nivel de conocimientos y de comprensión en

- Progresiones geométricas
- Desarrollo binomial
- Cálculo de derivadas
- Resolución de problemas en los que una situación práctica es modelizada a través de funciones exponenciales.

En general, la calculadora no fue usada con eficacia por la mayoría de los estudiantes, a pesar de que saber cuándo optar por la calculadora es un elemento esencial de esta prueba. Muchas veces se optaba por métodos analíticos que o bien eran inconducentes o bien enredaban al estudiante en procedimientos algebraicos innecesarios.

Puntos fuertes y débiles de los estudiantes al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1 (Progresiones y series geométricas)

Esta pregunta fue, en general, bien resuelta por la mayoría de los estudiantes, aunque unos cuantos tuvieron dificultades para dar la respuesta al apartado (b) en forma exacta o con tres cifras significativas. Algunos estudiantes invirtieron la división de términos y obtuvieron una razón de -5/3. De estos, la mayoría no se dio cuenta de que el valor de esta razón no era válido para hallar la suma en el apartado (c).

Pregunta 2 (Desarrollo binomial)

Hubo resultados variados en esta pregunta. Muchos estudiantes mostraron un desarrollo binomial de algún tipo, aunque el simple desarrollo de las filas del triángulo de Pascal no constituye suficiente evidencia. Un error común fue dar como respuesta el coeficiente del término, y muchos omitieron los paréntesis en el procedimiento. Si bien no se penalizó la notación negligente si el estudiante llegaba al resultado correcto, para algunos la omisión de los paréntesis derivó en una respuesta incorrecta.

Pregunta 3 (Gráfica de una función, pendiente numérica)

En la búsqueda de las intersecciones con el eje x, fue común que los estudiantes se embarcaran en un método algebraico infructuoso mediante el uso de logaritmos para resolver $f(x)=0$. Estos valores pueden encontrarse fácilmente usando las funciones de la calculadora gráfica, lo cual también le sirve al estudiante como preparativo para el dibujo de la gráfica en el apartado (b). La mayoría de los estudiantes procedió luego a dibujar una gráfica aproximada relativamente correcta, que pasaba por los tres puntos de intersección. Sin embargo, pocos estudiantes consideraron el dominio y el recorrido de la función con algún grado satisfactorio de precisión. A pesar de que la instrucción “escriba” en el apartado

(c) indica claramente que no se necesita ningún procedimiento, muchos perdieron tiempo innecesariamente, buscando la función derivada. Cuando esto se hacía bien, se otorgó la puntuación máxima, pero aquellos que usaron la opción de derivada numérica de la calculadora gráfica también llegaron a la pendiente, sin correr el riesgo de cometer un error analítico.

Pregunta 4 (Distribución de probabilidades y valor esperado)

Una buena cantidad de estudiantes resolvió bien esta pregunta, aunque algunos igualaron incorrectamente la suma de las probabilidades a cero en lugar de a uno, lo cual sugeriría una internalización mecanizada de "cuadrática igual a cero". Muchos estudiantes reconocieron que solamente era apropiado el valor positivo de k y así lo indicaron en su procedimiento. Muchos también llegaron luego al valor esperado correcto, aunque hubo estudiantes que escribieron la fórmula tomada del cuadernillo de información y no la usaron, y por ende no obtuvieron ningún punto.

Pregunta 5 (Distribución normal)

Aunque muchos estudiantes sombrearon o rotularon de alguna otra forma las regiones apropiadas en la curva normal, fueron muchos menos los que pudieron aplicar técnicas de probabilidades normales para obtener resultados correctos en el apartado (b). Muchos igualaron la fórmula estandarizada a las probabilidades en lugar de a los valores de z adecuados, que pueden hallarse por medio de tablas o de la calculadora gráfica. Otros simplemente dejaron en blanco este apartado, lo cual sugiere falta de preparación en este tipo de preguntas de distribución normal "inversas".

Pregunta 6 (Probabilidad binomial)

Muchos estudiantes no identificaron la naturaleza binomial de esta pregunta, lo cual sugiere una falta de preparación generalizada en este tema. Muchos trabajaron con 7 días en lugar de 3 pero, si habían mostrado el procedimiento, pudieron igualmente acceder a algunos puntos por arrastre de error (coherencia). Los que usaron la calculadora gráfica eficazmente muchas veces obtuvieron la respuesta correcta, aunque en el apartado (c) algunos estudiantes malinterpretaron el significado de "al menos uno" y hallaron o bien $P(X \leq 1)$ o bien $1 - P(X \leq 1)$.

Pregunta 7 (Vectores)

Los estudiantes que estaban bien preparados en este tema resolvieron la pregunta particularmente bien; muchas veces, el único error fue algún error de cálculo en la resolución del sistema de ecuaciones resultante. Curiosamente, algunos estudiantes hallaron los valores correctos para *s* y para *t*, pero al reemplazar en una de las ecuaciones vectoriales, se olvidaron de hallar la coordenada *z* de *T*.

Pregunta 8 (Ecuaciones trigonométricas)

Para el apartado (a), la mayoría de los estudiantes usó correctamente la gráfica para identificar los tiempos en los que la profundidad alcanzaba el máximo y el mínimo. La mayoría no tuvo en cuenta que la profundidad del agua aumenta más rápidamente en un punto de inflexión y muchas veces dieron como respuesta el intervalo de $t = 9$ a $t = 11$. Algunos estudiantes, interpretando erróneamente el eje que debían considerar, dieron como respuesta la profundidad en lugar del tiempo.

Un número importante de estudiantes tuvo dificultades para hallar los parámetros de una función trigonométrica: muchos solamente hicieron superficiales intentos por resolver el apartado (b), que muchas veces fue dejado en blanco.

Algunos dividieron 2π por el período (12), mientras que otros reemplazaron un par ordenado, como por ejemplo $(4,10)$ y resolvieron para *B*, muchas veces en forma correcta. Muchos, confundiendo la traslación vertical con la ordenada al origen, llegaron a $c = 17$.

Para el apartado (c), muchos estudiantes simplemente leyeron valores aproximados de la gráfica para $y = 12$ y a partir de esto llegaron a $t = 3,5$ y $t = 10,5$. Si bien este último valor es correcto (con una aproximación de tres cifras significativas), el valor $t = 3,5$ conlleva la penalización por no respetar el grado de aproximación pedido, ya que se esperaba que los estudiantes calcularan este valor con sus calculadoras gráficas y llegaran al resultado $t = 3,52$. Aquellos que intentaron un método analítico pocas veces llegaron a resultados correctos.

Pregunta 9 (Análisis)

Muchos estudiantes aplicaron con claridad la regla del producto para comprobar correctamente la derivada dada. Algunos estudiantes no se percataron del carácter multiplicativo de la función e intentaron aplicar la regla de la cadena.

Para el apartado (b), frecuentemente la ecuación de la asíntota horizontal fue dada como $x = 0$.

A pesar de que el apartado (c) era una pregunta del tipo “escriba...” en la que no es necesario mostrar procedimiento alguno, una buena cantidad de estudiantes utilizó un método algebraico para hallar *r* y *s*, que algunas veces derivó en respuestas incorrectas. Aquellos que utilizaron sus calculadoras gráficas por lo general hallaron los valores correctos, aunque no siempre con tres cifras significativas.

En el apartado (d), muchos estudiantes demostraron cierta habilidad en hallar la ecuación de una normal, aunque algunos intentaron trabajar con la pendiente de la tangente.

Fue sorprendentemente pequeño el número de estudiantes que planteó una expresión absolutamente correcta para el área entre las curvas, que contemplara tanto la integración como la diferencia de funciones correcta. El usar límites de -6 y 2 fue un error común, como lo fue también integrar sobre $f(x)$ solamente. De los alumnos que sí escribieron la expresión correcta, muchos trataron de aplicar técnicas analíticas para calcular el área en lugar de utilizar la calculadora gráfica.

Pregunta 10 (Funciones exponenciales)

Esta pregunta resultó muy accesible para unos cuantos estudiantes. En el apartado (a), muchos hallaron el valor correcto de n, pero muchas veces, interpretando erróneamente que 6,12 años después de fines del año 2000 sería el año 2007, dieron como respuesta el año 2006.

Muchos hallaron los valores correctos en el apartado (b) pero frecuentemente justificaban su resultado señalando simplemente que el valor después de siete años es menor de 51200. Una alternativa común fue la de dividir 46807 por 25600 y señalar que este valor es menor de dos. Hubo además una buena cantidad de estudiantes que no brindó la justificación pedida.

El apartado (c) resultó un desafío mayor para los estudiantes. Muchos obtuvieron el valor correcto para la razón R; sin embargo, pocos estudiantes crearon luego una ecuación o una inecuación apropiada, dividiendo la función de P por la función de T e igualando el resultado a 70, o haciéndolo menor de 70. Tal función, si bien no es conocida, puede ser resuelta utilizando las opciones gráficas o de resolución de ecuaciones de la calculadora gráfica. Muchos estudiantes optaron por el uso de tablas, pero frecuentemente escribían solamente un valor de la tabla, como por ejemplo $n = 10, R = 68{,}3$. Lo fundamental es incluir los dos valores entre los que cae la respuesta correcta. La inclusión de $n = 9, R = 70{,}8$ hubiera resultado evidencia suficiente, para que quedara claro que se había superado el valor $R = 70$.

Recomendaciones y orientaciones para la enseñanza de futuros estudiantes

Es esencial, para que el alumno rinda con éxito este examen, haber estudiado todos los contenidos del programa. A juzgar por la cantidad de estudiantes que no resolvió determinadas preguntas o mostró poco dominio de determinados temas, particularmente en probabilidades e integración, es evidente que, a la hora de preparar a los estudiantes, debe ponerse mayor énfasis en estos temas.

Parecería que en esta convocatoria, más que en otras anteriores, los estudiantes han sido algo negligentes en el tema de dar las respuestas con tres cifras significativas. Muchos las dieron con tres lugares decimales o al entero más próximo, mientras que otros anotaron todo el resultado que veían en el visor de la calculadora. En un curso que dura dos años, podría resultar beneficioso resaltar la regla acerca de las tres cifras significativas todos los días, desde el comienzo mismo del curso, ya sea que se esté usando la calculadora o no.

22087310

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Jueves 8 de mayo de 2008 (mañana)

1 hora 30 minutos

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 6]*

Considere la progresión geométrica infinita $3000, -1800, 1080, -648, \dots$.

(a) Halle la razón común. *[2 puntos]*

(b) Halle el 10^{mo} término. *[2 puntos]*

(c) Halle la suma **exacta** de la progresión infinita. *[2 puntos]*

(a) $r = \frac{-1800}{3000} = -0{,}6$

(b) $u_{10} = 3000(-0{\cdot}6)^9$

$= -30{,}2$

(c) $S_\infty = \frac{3000}{1+0{,}6}$

$= 1875$

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Halle el término en x^3 del desarrollo de $\left(\frac{2}{3}x-3\right)^8$.

$\binom{8}{5}\left(\frac{2}{3}x\right)^3(-3)^5$

$= -4032x^3$

3. *[Puntuación máxima: 7]*

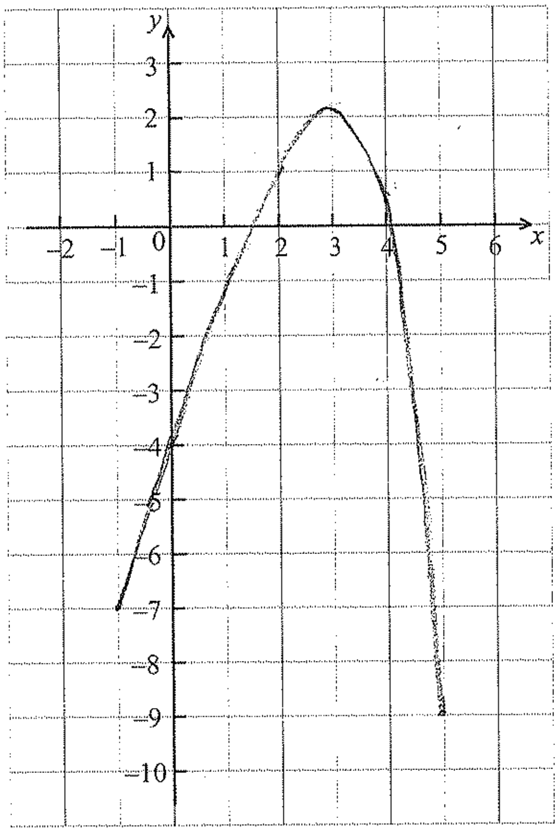
Sea $f(x) = 3x - e^{x-2} - 4$, para $-1 \le x \le 5$.

(a) Halle las intersecciones de la gráfica de f con el eje x. *[3 puntos]*

$3x - e^{x-2} - 4 = 0$ (o gráfica)

intersecciones $(1{,}54, 0)$ y $(4{,}13, 0)$

(b) Dibuje aproximadamente la gráfica de f en la cuadrícula que aparece a continuación. *[3 puntos]*



(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 3: continuación)

(c) Escriba la pendiente de la gráfica de f en $x = 2$. *[1 punto]*

$f'(2) = 2$

4. *[Puntuación máxima: 7]*

La siguiente tabla muestra la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X.

x	-1	0	2	3
$\mathrm{P}(X = x)$	0,2	$10k^2$	0,4	$3k$

(a) Halle el valor de k. *[4 puntos]*

(b) Halle el valor esperado de X. *[3 puntos]*

(a) $0{,}2 + 10k^2 + 0{,}4 + 3k = 1$

$k = 0{,}1$

(b) $E(x) = -1(0{,}2) + 2(0{,}4) + 3(0{,}3)$

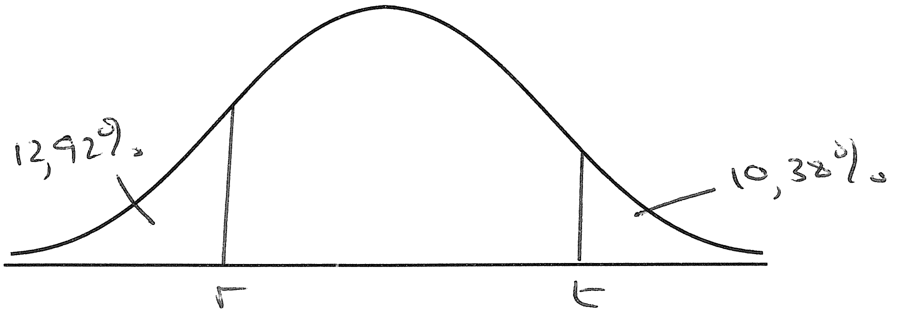
$= 1{,}5$

5. *[Puntuación máxima: 7]*

Las alturas de un cierto tipo de planta siguen una distribución normal. Las plantas se clasifican en tres categorías.

El 12,92 %, las más cortas, se encuentran en la categoría A.
El 10,38 %, las más altas, se encuentran en la categoría C.
El resto de las plantas se encuentra en la categoría B, estando sus alturas comprendidas entre r cm y t cm.

(a) Complete la siguiente figura, representando esta información. *[2 puntos]*



(b) Sabiendo que la altura media es 6,84 cm y que la desviación típica es 0,25 cm, halle el valor de r y el de t. *[5 puntos]*

$P(X < r) = 0,1292$
$r = 6,56$

$P(X < t) = 1 - 0,1038$
$t = 7,16$

6. *[Puntuación máxima: 7]*

Paula va al trabajo tres días a la semana. Cada uno de esos días, la probabilidad de que vaya en un autobús rojo es $\frac{1}{4}$.

(a) Escriba el número esperado de veces que Paula va a trabajar en un autobús rojo en una semana dada. *[2 puntos]*

En una semana, halle la probabilidad de que vaya al trabajo en un autobús rojo

(b) exactamente dos días; *[2 puntos]*

(c) al menos un día. *[3 puntos]*

(a) $E(x) = 3 \times \frac{1}{4}$
$= \frac{3}{4}$

(b) $X \sim B(3, \frac{1}{4})$

$p(X = 2) = 0{,}141$

(c) $p(x \geq 1) = 1 - p(X = 0)$
$= 0{,}578$

7. *[Puntuación máxima: 6]*

La recta L_1 está definida por $\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y la recta L_2 por $\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto T. Halle las coordenadas de T.

$\hat{r}_1 = \hat{r}_2$

$2 + s = 3 - t$

$5 + 2s = -3 + 3t$

$s = -1 \quad t = 2$

$T \quad \hat{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

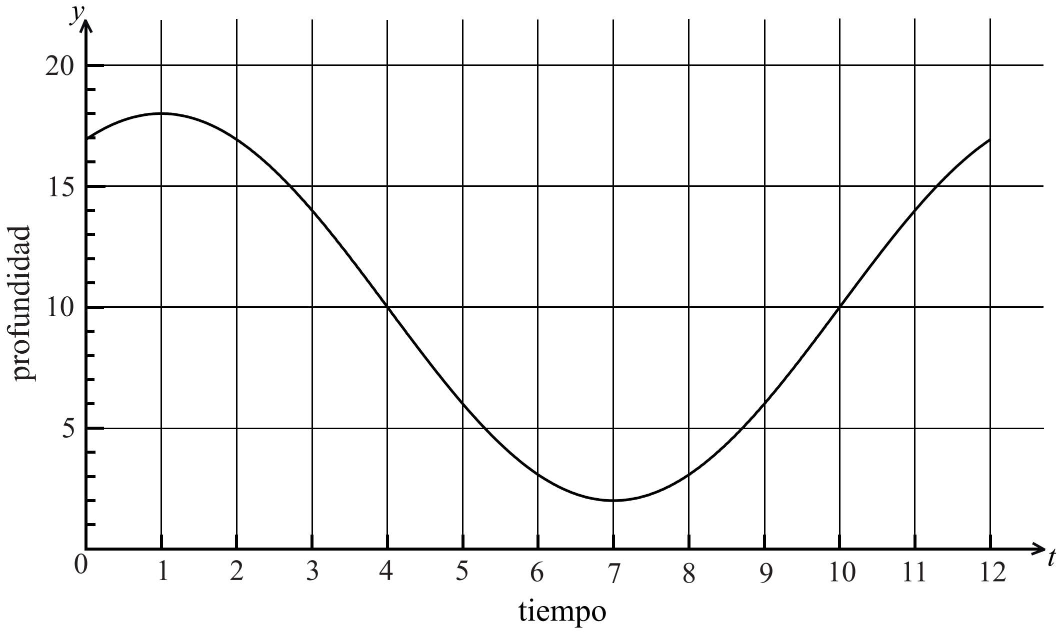
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad T(1, 3, 0)$

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

8. *[Puntuación máxima: 11]*

La siguiente gráfica muestra la profundidad del agua, y metros, en un punto P a lo largo de un día. El tiempo t viene dado en horas, desde medianoche hasta el mediodía.



(a) Utilice la gráfica para escribir una estimación del valor de t cuando

(i) la profundidad del agua es mínima;

(ii) la profundidad del agua es máxima;

(iii) la profundidad del agua está aumentando más rápidamente. *[3 puntos]*

(b) La profundidad del agua puede ser modelada por la función $y = A\cos\left(B(t-1)\right) + C$.

(i) Compruebe que $A = 8$.

(ii) Escriba el valor de C.

(iii) Halle el valor de B. *[6 puntos]*

(c) Un marinero sabe que no puede navegar más allá de P cuando la profundidad del agua es inferior a 12 m. Calcule los valores de t entre los cuales el marinero no puede navegar más allá de P. *[2 puntos]*

8(a) (i) $t = 7$

(ii) $t = 1$

(iii) $t = 10$

(b) (i) $A = \frac{18-2}{2}$

$= 8$

(ii) $C = 10$

(iii) periodicidad $= 12 = \frac{2\pi}{B}$

$B = \frac{\pi}{6}$

(c) $y = 8\cos\left[\frac{\pi}{6}(t-1)\right] + 10 = 12$

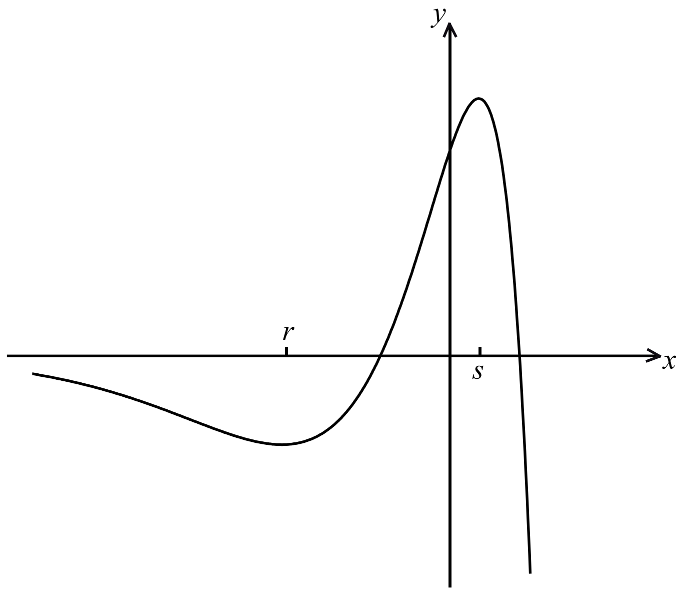
$t = 3.52, \ t = 10.5$

9. *[Puntuación máxima: 17]*

Sea $f(x) = e^x(1 - x^2)$.

(a) Compruebe que $f'(x) = e^x(1 - 2x - x^2)$. *[3 puntos]*

El siguiente diagrama muestra una parte de la gráfica de $y = f(x)$, para $-6 \leq x \leq 2$.
Las coordenadas x del mínimo y del máximo locales son r y s respectivamente.



(b) Escriba la **ecuación** de la asíntota horizontal. *[1 punto]*

(c) Escriba el valor de r y el de s. *[4 puntos]*

(d) Sea L la normal a la curva de f en $P(0, 1)$. Compruebe que L tiene por ecuación $x + y = 1$. *[4 puntos]*

(e) Sea R la región encerrada por la curva $y = f(x)$ y la recta L.

(i) Halle una expresión para el área R.

(ii) Calcule el área de R. *[5 puntos]*

9. (a) $f'(x) = e^x(1-x^2) + e^x(-2x)$

$= e^x(1-2x-x^2)$

(b) $y=0$

(c) $r = -2.41$, $s = 0.414$

(d) $f'(0) = 1$

pendiente de la normal $= -1$

$y-1 = -1(x-0)$

$x+y=1$

(e) (i) límites cuando $1-x = e^x(1-x^2)$

$x = 0, 1$

$\therefore$ área $= \int_0^1 \left[e^x(1-x^2) - (1-x)\right] dx$

(ii) $R = 0.5$

10. *[Puntuación máxima: 17]*

Una ciudad está preocupada por el tema de la polución, y decide observar el número de personas que utiliza taxis. Al final del año 2000, había 280 taxis en la ciudad. Después de n años el número de taxis, T, que hay en la ciudad viene dado por

$$T = 280 \times 1{,}12^n .$$

(a) (i) Halle el número de taxis que hay en la ciudad al final del año 2005.

(ii) Halle el año en el cual el número de taxis será el doble del número de taxis que había al final del año 2000. *[6 puntos]*

(b) Al final del año 2000 había en la ciudad 25 600 personas que utilizaban taxis. Después de n años, el número de personas, P, en la ciudad que utiliza taxis viene dado por

$$P = \frac{2\,560\,000}{10 + 90\mathrm{e}^{-0{,}1n}} .$$

(i) Halle el valor de P al final de 2005, redondeando su respuesta al número entero más próximo.

(ii) Después de siete años completos, ¿será el valor de P el doble del valor que tenía al final del año 2000? Justifique su respuesta. *[6 puntos]*

(c) Sea R la razón entre el número de personas que utiliza taxis en la ciudad y el número de taxis. La ciudad reducirá el número de taxis si $R < 70$.

(i) Halle el valor de R al final del año 2000.

(ii) ¿Después de cuántos años completos la ciudad reducirá el número de taxis por primera vez? *[5 puntos]*

10. (a) (i) $T = 280 \times 1.12^5$
$= 493$

(ii) $280 \times 1.12^n = 560$ or $1.12^n = 2$
$n = 6.116\ldots$
en el año 2007

(b) (i) $P(5) = 39636$

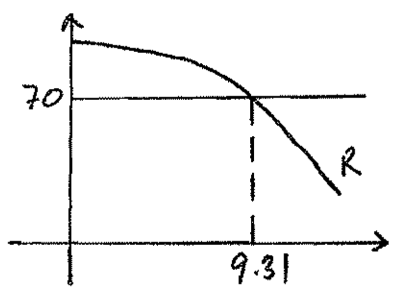
(ii) $P(7) = 46806.997$

no es el doble porque $46807 < 51200$

(c) (i) $R = \frac{P}{T} = 91.4$

(ii) $\frac{P}{T} < 70$
$n = 9.31\ldots$
después de 10 años

GDC #1



GDC #2

n	R
8	73.209
9	70.764
10	68.286