Informe general de la asignatura, mayo de 2016

Matemáticas NS

Límites de calificación de la asignatura

Matemática discreta

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 12	13 - 25	26 - 39	40 - 51	52 - 64	65 - 76	77 - 100

Análisis

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 12	13 - 25	26 - 37	38 - 49	50 - 61	62 - 73	74-100

Conjuntos, relaciones y grupos

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 12	13 - 26	27 - 38	39 - 51	52 - 63	64 - 74	75 - 100

Estadística y probabilidad

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 12	13 - 26	27 - 39	40 - 51	52 - 63	64 - 74	75 - 100

Para proteger la integridad de los exámenes, cada vez se están utilizando más variantes de los cuestionarios de examen para distintas zonas horarias. Al recurrir a variantes del mismo cuestionario de examen, los alumnos ubicados en una parte del mundo no estarán respondiendo siempre al mismo examen que los alumnos ubicados en otras partes del mundo.

Se sigue un proceso muy riguroso para garantizar que las diversas variantes del examen sean comparables en lo que respecta a su dificultad y a la cobertura del programa de estudios, y se toman las medidas pertinentes para garantizar que se apliquen las mismas normas de calificación a todos los exámenes escritos de los alumnos, independientemente de cuál haya sido la versión del cuestionario de examen a la que hayan respondido. Para la convocatoria de mayo de 2016, el IB preparó variantes de la Prueba 1 y la Prueba 2 de Matemáticas NS para las distintas zonas horarias.

Evaluación interna del Nivel Superior

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 2	3 - 5	6 - 8	9 - 11	12 - 14	15 - 16	17 - 20

Ámbito y adecuación del trabajo entregado

La mayoría de las exploraciones fueron acordes con el contenido del programa de estudios de Matemáticas NS, pero la calidad de los trabajos presentados fue variable. Algunos trabajos que abordaron los temas de Matemáticas NS con un enfoque creativo muy interesante obtuvieron una puntuación del rango más alto. Lamentablemente, también hubo alumnos que presentaron una exploración extraída directamente de libros de texto o fuentes de Internet, en algunos casos con temas muy complejos. En estos casos, resultaba evidente que el alumno no había comprendido los procedimientos matemáticos utilizados. De hecho, algunas exploraciones se alejaban tanto de los conocimientos que esperaba el profesor o el moderador que resultaban en gran medida incomprensibles y muy complicadas de moderar. Hay que recordar a los alumnos que el público objetivo de su trabajo son alumnos de su mismo curso. Algunas exploraciones seguían sin incluir citas en el cuerpo del trabajo. Es necesario que todos los profesores estén claramente informados de este requisito para que, a su vez, se lo transmitan a los alumnos. Asimismo, sigue habiendo profesores que permiten a sus alumnos presentar exploraciones excesivamente largas. Si bien no se aplica una penalización estricta por entregar una exploración de más de 12 páginas, hay que aconsejar a los alumnos que elijan un tema bien delimitado que les permita completar su exploración dentro del número de páginas recomendado. Se siguen enviando trabajos sobre temas poco originales, como el modelo SIR, el póquer Texas Hold'em, los fractales y la razón áurea. Algunas de las exploraciones presentadas, aunque menos que en otras ocasiones, se habían extraído de videos de matemáticas. Este tipo de videos puede ser un buen estímulo al inicio del proceso de exploración, pero los alumnos no pueden limitarse a transcribir el contenido del video y presentarlo como si fuese su propio trabajo de exploración.

Desempeño de los alumnos en cada criterio

Criterio A

La mayoría de los alumnos abordaron bien este criterio, pues entregaron trabajos coherentes y organizados (unos más que otros). Como se ha mencionado en el apartado anterior, parece que algunos alumnos no son bien aconsejados por sus profesores, pues presentan trabajos que exceden con creces la longitud recomendada (superando con frecuencia las 20 páginas). Algunos alumnos incluyeron apéndices para que la longitud de la exploración no excediera las 12 páginas; sin embargo, con esta maniobra la exploración perdió toda coherencia, pues el lector tenía que consultar el apéndice para poder entender el trabajo. También en esta ocasión hubo alumnos que elaboraron un índice de contenidos e incluyeron un cómputo de palabras, cuando ninguna de estas dos cosas es necesaria en la exploración. Hubo algunos problemas de coherencia cuando los alumnos trataron de explicar cosas que se escapaban a su propia comprensión.

Criterio B

La mayoría de los alumnos obtuvieron buenos resultados en este criterio. Algunos profesores perdonaron el uso indebido de notación de calculadora en la redacción del trabajo, lo que se tradujo en un ajuste del nivel de logro que habían concedido a los alumnos. En otros pocos casos, los profesores perdonaron a los alumnos que no habían definido las variables y los parámetros empleados en exploraciones de modelos matemáticos.

Criterio C

Los profesores siguen teniendo la impresión de que este criterio se basa en el compromiso y el entusiasmo que muestran los alumnos con el tema. Es muy importante que tanto profesores como alumnos entiendan bien qué se evalúa con este criterio. Copiar contenidos directamente de un libro de texto, de un sitio web o de un video impide al alumno expresar sus propias ideas en la exploración. Los alumnos deben tomar las riendas de su trabajo y resolver alguna curiosidad que les haya surgido a partir del estímulo utilizado. Algunas de las exploraciones presentadas demostraban claramente originalidad y dejaban entrever el entusiasmo del alumno.

Criterio D

Por lo general, en esta convocatoria los alumnos abordaron más eficazmente este criterio. Esto se vio cuando reflexionaban a lo largo de todo el trabajo, demostrando habilidades de reflexión cognitiva. En la mayoría de los casos los alumnos parecieron entender qué constituye una "reflexión significativa", pero a muchos les sigue costando demostrar una "reflexión crítica". Aquellos alumnos que lograron un nivel elevado en este criterio también obtuvieron una puntuación muy buena en el criterio C, puesto que al esforzarse por superar los defectos o las carencias que creían que tenían lograron demostrar también una implicación personal con su trabajo.

No obstante, sigue habiendo algunos profesores y alumnos a los que este criterio les plantea problemas. Si un alumno solo incluye reflexiones en la conclusión y se limita a hacer comentarios sobre el alcance y las limitaciones de los resultados obtenidos, le será difícil obtener los niveles de logro más altos. Aconsejamos a los profesores que consulten el documento *Matemáticas NS: Notas adicionales y orientación sobre la exploración*, que pueden encontrar en el CPEL.

Criterio E

Una vez más, las exploraciones presentadas en esta convocatoria incluían una variedad de contenidos matemáticos, desde conceptos muy básicos hasta ampliaciones del curso de NS que se salían con creces del ámbito de la exploración. En ambos extremos, fue difícil conseguir 6 puntos en este criterio. Aquellos alumnos que optaron por explorar conceptos más complejos fueron incapaces de demostrar su comprensión de las matemáticas utilizadas y a menudo se limitaron a transcribir información obtenida de las fuentes que habían consultado. Con mucha frecuencia esto iba unido a una ausencia de explicaciones, lo que demostraba que el alumno no había entendido completamente el concepto y, por tanto, era incapaz de escribir un trabajo de un nivel asequible para un alumno típico de NS. Algunos alumnos que se decantaron por una exploración sobre modelos matemáticos no fueron más allá del trabajo mecánico que supone resolver una ecuación diferencial o recabar datos y llevar a cabo un análisis de regresión apoyándose en medios tecnológicos.

Recomendaciones para la enseñanza a futuros alumnos

Hay indicios que sugieren que algunos profesores no dedican suficientes horas lectivas al proceso de exploración. Es imprescindible dedicar 10 horas lectivas a orientar a los alumnos y ayudarles a entender los requisitos de esta tarea de evaluación interna y los criterios que se utilizan para evaluarla. Una forma de lograrlo puede ser que los alumnos lean y corrijan un par de exploraciones de las publicadas en el *Material de ayuda al profesor de Matemáticas NM y NS*. Al dorso del formulario 5/EXCS hay espacio para escribir información de contexto. Debe ser el profesor, y no el alumno, quien complete este apartado. La información de contexto debe mencionar también cuáles eran los conocimientos matemáticos previos de la clase cuando se pidió a los alumnos que realizaran la exploración, y no información sobre el alumno en cuestión y su grado de implicación con el tema. También es obligatorio que los profesores den muestras de que han calificado las exploraciones, usando marcas para indicar aquellas partes en que las matemáticas empleadas son correctas y para identificar los errores cometidos. Las marcas y los comentarios se deben hacer directamente junto a la respuesta escrita del alumno. Es el profesor quien evalúa el trabajo: el papel del moderador es ratificar los niveles de logro que ha concedido el profesor, no puntuar el trabajo. Los comentarios crípticos escritos en el trabajo del alumno, del tipo "C+" o "D+", no son útiles cuando el moderador trata de verificar el nivel de logro que ha concedido el profesor. Los profesores deben evitar enviar fotocopias de los trabajos de los alumnos. En su lugar, tienen que enviar los trabajos originales (impresos en color, si procede) con comentarios para la moderación.

Prueba 1 del Nivel Superior

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 12	13 - 25	26 - 38	39 - 53	54 - 67	68 - 82	83 - 120

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Probabilidad
- Análisis y aplicaciones sencillas de la regla de la cadena
- Teorema del binomio
- Elaboración de gráficos

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

- Inducción matemática
- Manejo de números complejos (en lo que respecta a productos y sumas de raíces)
- Ecuaciones trigonométricas más avanzadas

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas

Sección A

Pregunta 1

Esta pregunta fue un comienzo sencillo para muchos de los alumnos. La mayoría de los alumnos que la resolvieron correctamente hallaron la respuesta mediante la reducción por filas de una matriz apropiada. Aquellos que eligieron otros métodos con frecuencia cometieron errores algebraicos.

Pregunta 2

Esta es otra pregunta habitual. En esta ocasión, se pedían coordenadas concretas y algunos alumnos que, por lo demás, son buenos perdieron un par de puntos en esta pregunta por descuido.

Pregunta 3

En general, esta pregunta se respondió bien. Algunos alumnos más flojos trataron de resolver el apartado (b) empleando una sustitución, a pesar de que era bien sabido que el resultado estándar era $\arctan x$. Hubo unos pocos que partieron de $\arctan x + c$ y obtuvieron una respuesta final incorrecta.

Pregunta 4

En general, los alumnos resolvieron muy bien esta pregunta. Hubo una pequeña minoría que trató de "demostrar" el resultado sustituyendo valores concretos en la identidad, lo que hizo que obtuvieran muy pocos puntos o ninguno. Algunos empezaron dando por supuesto que el resultado era correcto y manipularon ambos lados de la igualdad hasta llegar a una identidad obvia. Estos alumnos obtuvieron algún punto por este desarrollo, pero se debe desalentar este enfoque.

Pregunta 5

En general, esta pregunta se resolvió muy bien y planteó pocos problemas, excepto a los alumnos más flojos.

Pregunta 6

Esta fue otra pregunta que la mayoría de los alumnos supieron resolver muy bien. A algunos les costó el apartado (b), pues trataron de hallar una expresión para d, la diferencia, y luego la sustituyeron en otras ecuaciones donde generalmente cometieron errores algebraicos. La técnica más adecuada fue aplicar $u_3 - u_2 = u_4 - u_3$. Con frecuencia, una buena presentación ayudó a los alumnos a llegar al resultado final. En el último apartado, la mayoría de alumnos realizaron una factorización correcta, aunque a unos pocos les pareció sensato adivinar la(s) respuesta(s) correcta(s).

Pregunta 7

El apartado (a) planteó pocos problemas. El apartado (b) resultó ser un buen discriminador para identificar a los alumnos que merecían 4/5 puntos. Algunos conocían un forma alternativa (y útil) de expresar la probabilidad condicionada, pero fueron incapaces de interpretar $P\left(A \cap \left(A \cup B\right)\right)$. En este apartado hubo un gran número de respuestas totalmente correctas.

Pregunta 8

Esta pregunta resultó ser un buen discriminador. La mayoría de los alumnos fueron capaces de llegar hasta $P\left(k+1\right) = k^3 + 3k^2 + 8k + 6$, y algunos incluso lograron avanzar más.

Lamentablemente, incluso aquellos alumnos que, por lo demás, son buenos siguen formulando enunciados de inducción incorrectos o incompletos, como "Si $n = k$ es" en lugar de "Supongamos que es cierto que $n = k$" (o equivalente).

También se ha observado que, en esta convocatoria, un mayor número de alumnos dio por hecho que "$P(n)$ es verdadero" antes de pasar a evaluar $P(n+1)$. Este tipo de enfoque demuestra que no entienden el enunciado de inducción, por lo que obtuvieron muy pocos puntos.

Pregunta 9

Esta pregunta resultó ser la más problemática de todo el examen.

El apartado (a) se resolvió bien en general, manipulando correctamente las fracciones y los números irracionales para llegar a la respuesta del enunciado.

Sin embargo, se puede contar con los dedos de las manos a los alumnos que resolvieron el apartado (b) a la perfección; casi en ningún caso se dieron las soluciones. Algunos alumnos obtuvieron un punto por hallar o por utilizar el denominador común $\operatorname{sen} x \cos x$.

Sección B

Pregunta 10

Con frecuencia los alumnos resolvieron acertadamente los apartados (a) y (b), aunque algunos mostraron una clara confusión al tratar de demostrar que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} p \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y en algunos exámenes se vieron argumentos innecesariamente enrevesados.

El apartado (c) resultó problemático en muchos casos; algunos alumnos utilizaron el seno (o el coseno) de un ángulo que no era el correcto y, por consiguiente, pudieron optar a pocos puntos en este apartado. También se vieron algunas soluciones buenas y claras, complementadas con diagramas en el caso de los alumnos más reflexivos que fueron capaces de "ir desarrollando" la pregunta en lugar de limitarse a aplicar un resultado vectorial estándar.

Pregunta 11

El apartado (a) con frecuencia se resolvió bien, aunque por algún motivo hubo una minoría que utilizó incorrectamente $\pi \int (3\cos 2y)^2 dy$ y, en consecuencia, ya no pudo obtener más que unos pocos puntos. A veces los alumnos utilizaron límites incorrectos, por lo que solo pudieron optar a los puntos por método correcto. Un número sorprendentemente elevado de alumnos supieron resolver la integración de $\cos^2 2y$ utilizando la fórmula correcta.

El apartado (b) también se resolvió bien y no planteó demasiados problemas.

Sin embargo, en el apartado (c) hubo pocos alumnos capaces de hallar la respuesta correcta. Solo los mejores utilizaron correctamente la regla de la cadena al tratar de obtener una expresión para $\frac{d^2h}{dt^2}$.

Pregunta 12

La mayoría de los alumnos lograron la máxima puntuación tanto en el apartado (a) como en el apartado (b)(i). Para obtener el punto del apartado (b)(ii), se esperaba que los alumnos indicaran que $w-1\neq 0$; algunos sí se dieron cuenta de ello.

En el apartado (c), había que dar las raíces en función de w. Algunos alumnos ignoraron este requisito, aunque por suerte no muchos. En pocos casos se dibujaron diagramas de Argand claros; en este aspecto, se podría mejorar la presentación general de los alumnos. Dicho esto, la mayoría de los exámenes obtuvieron al menos 2 de los 3 puntos que había en juego.

El apartado (d) demostró ser un buen discriminador de los mejores alumnos. Parece que ahora se comprenden mejor las fórmulas del producto y la suma de raíces y, aunque solo los mejores lograron la máxima puntuación, hubo bastantes alumnos que demostraron el resultado $b=1$.

En el apartado (e), la mayoría de los alumnos que lograron llegar a esta parte del examen consiguieron 2 o 3 puntos, aunque a veces siguieron un desarrollo incorrecto. Era necesario justificar correctamente la elección de $i\sqrt{7}$ en lugar de $-i\sqrt{7}$, pero rara vez se dio esta justificación.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

- Hay que mejorar la presentación general, especialmente en lo que respecta a las preguntas sobre inducción y a los diagramas de Argand.
- Es necesario hacer hincapié en la comprensión de la inducción matemática.
- Hay que prestar más atención a los límites a la hora de aplicar las integrales definidas.

Prueba 2 del Nivel Superior

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 17	18 - 34	35 - 49	50 - 63	64 - 77	78 - 91	92 – 120

Comentarios generales

Hubo bastantes alumnos a los que esta prueba les resultó razonablemente accesible, y un número gratamente elevado realizó exámenes excelentes que presentaron trabajo, razonamiento lógico y argumentación correctos. También fue positivo el número de alumnos que, cuando fue necesario, utilizaron la calculadora de pantalla gráfica con criterio para resolver una ecuación apropiada. Sin embargo, un problema recurrente en la prueba 2 de Matemáticas NS es el número de alumnos que tienen la calculadora de pantalla gráfica configurada en modo grados, como se vio en la pregunta sobre las propiedades de la función de densidad de probabilidad continua (función trigonométrica). Otro motivo de preocupación fue el empleo de notación vectorial deficiente o incorrecta, o incluso la ausencia de notación vectorial en un contexto de aplicación geométrica de vectores.

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Calcular la probabilidad $\mathrm{P}\left(|X| > x\right)$ para una distribución normal
- Utilizar correctamente la simetría y el área bajo la curva de la función densidad de probabilidad de una distribución normal
- Determinar el dominio y el recorrido de una función inversa
- Hallar el valor esperado (el beneficio, en este caso) de una distribución de probabilidad discreta
- En cinemática, darse cuenta de que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$
- Usar vectores con la notación vectorial correcta en un contexto geométrico
- Emplear la calculadora de pantalla gráfica para resolver una desigualdad
- Formular y resolver una ecuación cuadrática en e^{x}
- Plantear de manera lógica las soluciones a preguntas del tipo "Muestre que"

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

- Aplicaciones de las relaciones trigonométricas, incluido el uso del teorema del coseno
- Resolución de sistemas de ecuaciones utilizando diversos enfoques
- Formulación de ecuaciones vinculadas a una progresión geométrica
- Realización de cálculos rutinarios con una distribución normal y una distribución de Poisson
- Hallazgo de la función inversa de una función dada
- Derivación implícita
- Uso de la calculadora de pantalla gráfica para calcular la media, la moda y la varianza de una función de densidad de probabilidad continua
- Derivadas aplicando la regla del producto y la del cociente

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas

Pregunta 1

La mayoría de los alumnos resolvieron correctamente esta pregunta. Sin embargo, hubo algunos que no expresaron el ángulo que se pedía redondeando correctamente al número entero de grados más próximo.

Pregunta 2

En general, los alumnos resolvieron bien el apartado (a) pero no el apartado (b): muchos alumnos no sabían lo que representaba $\mathrm{P}\left(|X|>1\right)$. En el apartado (c), algunos alumnos no se dieron cuenta de que $\mathrm{P}\left(X>c\right)=1-\mathrm{P}\left(X\leq c\right)$. En todos los apartados de la pregunta hubo alumnos que habrían hecho bien en dibujar aproximadamente y rotular la situación.

Pregunta 3

Esta pregunta se resolvió razonablemente bien. Por lo general, los alumnos que no dieron con la solución correcta cometieron un error al tratar de aplicar las propiedades de los logaritmos o de las exponenciales y, por consiguiente, realizaron sustituciones erróneas.

Pregunta 4

Esta pregunta se resolvió razonablemente bien. Bastantes alumnos incluyeron una solución que estaba fuera del intervalo $-1<r<1$.

Pregunta 5

La mayoría de los alumnos fueron capaces de hallar una expresión para la función inversa. No obstante, hubo un gran número de alumnos que no fueron capaces de determinar el dominio y el recorrido de dicha función.

Pregunta 6

El apartado (a) se resolvió razonablemente bien. Hubo algunos alumnos que calcularon $\mathrm{P}\left(X=1\right)$.

El apartado (b) no lo resolvieron tan bien como cabía esperar, pues un número sorprendente de alumnos calcularon $5\mathrm{P}\left(X=0\right)+3P\left(X\geq 1\right)$ en lugar de $5\mathrm{P}\left(X=0\right)-3P\left(X\geq 1\right)$.

El apartado (c) los alumnos lo resolvieron muy acertadamente.

Pregunta 7

En general, los alumnos resolvieron bien el apartado (a). Algunos usaron una derivación parcial acompañada de notación rudimentaria en sus soluciones.

En el apartado (b), un gran número de alumnos supieron que había que usar $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ y parecieron entender lo que había que hacer para dar con la solución, pero luego fueron incapaces de sustituir correctamente $x=k$ y $y=\frac{3k^2}{4}$ en la relación y resolverla para k.

Pregunta 8

En el apartado (a), hubo un gran número de alumnos que creyeron que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ en lugar de $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$. En el apartado (b), bastantes de estos alumnos acabaron obteniendo un valor de s que estaba fuera del dominio $0\le s\le 1$.

Pregunta 9

En el apartado (a), hubo un número notablemente elevado de alumnos que no utilizó la notación vectorial correcta o bien no utilizó ningún tipo de notación vectorial. Un gran número de alumnos que parecieron adoptar un enfoque basado en el producto escalar no utilizaron el "punto" del producto escalar y representaron $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ como $\boldsymbol{ab}$. Unos pocos alumnos utilizaron correctamente el teorema del coseno con notación vectorial adecuada. Hubo un pequeño número de alumnos que expresaron $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dando las componentes de cada vector. En el apartado (a)(ii), hubo bastantes alumnos que expresaron $\overrightarrow{AB}$ como $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, en lugar de como $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

En el apartado (b), un pequeño número de alumnos ofrecieron demostraciones muy bien estructuradas.

Pregunta 10

Esta pregunta resultó accesible a la gran mayoría de los alumnos. Un número considerable de alumnos fueron capaces de dibujar con precisión y esmero una función de densidad de probabilidad continua, bimodal y no simétrica y de calcular la media, la moda y la varianza. Lamentablemente, hubo bastantes alumnos que abordaron esta pregunta con la calculadora de pantalla gráfica en modo grados.

Pregunta 11

Esta pregunta les resultó accesible a la gran mayoría de los alumnos. Fue positivo ver que, para resolver el apartado (a) y el apartado (b), los alumnos utilizaron acertadamente diversos métodos trigonométricos bastante ingeniosos.

Por lo general, los primeros subapartados del apartado (c) se resolvieron bien. En el subapartado (c)(i), hubo algunos alumnos que hallaron correctamente $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\alpha)$ en forma no simplificada pero luego cometieron un error algebraico al tratar de simplificar. También hubo alumnos que se limitaron a indicar que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\alpha)=\sec^2\alpha$.

El subapartado (c)(ii) lo resolvieron razonablemente bien; un gran número de alumnos entendieron lo que hacía falta para hallar el valor correcto de α en grados. En el subapartado (c)(iii), hubo un número razonable de alumnos que supieron hallar correctamente $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\tan\alpha)$ en forma no simplificada. Sin embargo, algunos trataron de resolver $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\tan\alpha)=0$ para x, en lugar de analizar el valor de $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\tan\alpha)$ en $x=\sqrt{35}$.

El apartado (d), donde se necesitaba la calculadora de pantalla gráfica para determinar una desigualdad, se lo saltó un número sorprendentemente elevado de alumnos. De los alumnos que respondieron este apartado, algunos indicaron que $x \geq 2.55$. Un porcentaje considerable de los alumnos que dieron con la desigualdad correcta no expresaron luego la respuesta redondeando a tres cifras significativas.

Pregunta 12

Los apartados (a) y (c) resultaron accesibles a la gran mayoría de los alumnos. El apartado (b), en cambio, les resultó notablemente más complicado.

El subapartado (a)(i) lo resolvieron razonablemente bien: la mayoría de los alumnos fueron capaces de mostrar que $\frac{1}{4f(x)-2g(x)}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+3}$. En el subapartado (a)(ii), hubo algunos alumnos que utilizaron correctamente la sustitución apropiada para obtener $\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+3}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u^2+3}\mathrm{d}u$, pero luego pensaron que para la antiderivada había que usar el logaritmo natural en vez de la arcotangente.

En el subapartado (b)(i), hubo un número razonable de alumnos capaces de plantear una ecuación cuadrática en e^x (con los parámetros n y k) y, a partir de ahí, avanzar para resolver la ecuación para e^x en función de n y k. Llegados a este punto, un pequeño número de alumnos se dieron cuenta de que convenía tomar el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación para, con ello, resolver $h(x)=k$ para x. En el subapartado (b)(ii), un pequeño número de alumnos fueron capaces de mostrar, a partir de la solución obtenida en el apartado (b)(i) o utilizando el discriminante, que la ecuación $h(x)=k$ tiene dos soluciones reales siempre y cuando $k>\sqrt{k^2-n^2+1}$ y $k>\sqrt{n^2-1}$.

Fue positivo ver que un buen número de alumnos trataron de resolver el apartado (c). En el subapartado (c)(i), un gran número de alumnos supieron aplicar correctamente la regla del producto o la regla del cociente para hallar $t'(x)$. Un menor número de alumnos fueron luego capaces de mostrar la equivalencia entre la forma de $t'(x)$ que habían obtenido y la forma de $t'(x)$ que requería la pregunta. Un número gratamente alto de alumnos supieron aplicar la propiedad de que $f'(x)=g(x)$ y $g'(x)=f(x)$. Al igual que el subapartado (c)(i), el (c)(ii) se podía abordar de distintas maneras. Los mejores alumnos presentaron un razonamiento lógico conciso para mostrar que $t'(x)>0$ para $x \in \mathbb{R}$.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

- Discutir con los alumnos qué es lo que tienen que hacer en una pregunta de tipo "muestre que" o una pregunta de demostración.
- Discutir con los alumnos las distintas configuraciones de la calculadora de pantalla gráfica y asegurarse de que entiendan cómo usar la calculadora para convertir de grados a radianes y viceversa.
- Discutir con los alumnos cómo usar eficazmente la calculadora de pantalla gráfica en la prueba 2. Asimismo, discutir en qué situaciones resulta más eficiente o más adecuado utilizar la calculadora de pantalla gráfica que un enfoque analítico.
- Discutir con los alumnos que es necesario expresar las respuestas finales redondeando a tres cifras significativas, salvo que se indique lo contrario en el enunciado de la pregunta.
- Discutir con los alumnos la importancia de no redondear antes de tiempo en los exámenes que permitan el uso de calculadoras de pantalla gráfica.
- Alentar a los alumnos a dibujar y rotular diagramas cuando aborden preguntas relativas a la distribución de probabilidad normal.
- Alentar a los alumnos a utilizar notación correcta cuando trabajen con vectores.
- Establecer la conexión entre el dominio y el recorrido de una función y el recorrido y el dominio de su inversa.
- Ofrecer a los alumnos numerosas oportunidades de poner en práctica sus conocimientos de análisis y probabilidad en contextos concretos.
- Plantear preguntas que se puedan resolver de diversas formas, y asegurarse de que los alumnos tengan ocasión de discutir en clase estos distintos enfoques.
- Es necesario consolidar mejor los conceptos de cinemática, y especialmente aclarar la idea errónea (pero muy extendida) de que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$.

Prueba 3 del Nivel Superior: Matemática discreta

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 8	9 - 16	17 - 27	28 - 34	35 - 42	43 - 49	50 - 60

Comentarios generales

Los alumnos deben saber con antelación a qué atenerse en lo que respecta al formato de la prueba. Con frecuencia, los alumnos ignoran las instrucciones que aparecen en la primera página y en la parte superior de la segunda página (por ejemplo, "salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas", "comience cada pregunta en una página nueva", "las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones").

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

A los alumnos les resultó difícil trabajar con gráficos y diagramas de árbol cuando tenían que pensar y no simplemente aplicar un algoritmo. La inducción matemática resultó ser un buen discriminador.

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Los alumnos aplicaron muy bien el algoritmo de Euclides y trabajaron a la inversa con él bastante bien. En lo que respecta a los algoritmos de grafos, los alumnos los conocían, pero en ocasiones se confundieron con ellos.

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas

Pregunta 1

Los alumnos respondieron muy bien el apartado (a). Algunos no consiguieron el último punto por no decir que su procedimiento mostraba que el máximo común divisor era 1.

En el apartado (b), los alumnos generalmente conocían bien el procedimiento inverso pero cometieron errores aritméticos. Hubo algunos alumnos que no se dieron cuenta de que el objetivo era mantener el 1 como combinación de *dos* restos. Los alumnos podrían haberse ayudado de la calculadora para comprobar la respuesta final y los pasos intermedios. Lamentablemente, con lo que estaban menos familiarizados era con el formato de combinaciones lineales que se podía utilizar para desarrollar el ejercicio. Véase el método alternativo que aparece en el esquema de calificación: este método hace que el desarrollo numérico del ejercicio sea mucho menos tedioso, por lo que vale la pena que los alumnos estén más familiarizados con él.

Pregunta 2

En el apartado (a), los alumnos generalmente aplicaron bien el algoritmo del vecino más próximo. Sin embargo, algunos no mostraron ningún conocimiento de este algoritmo y hubo cierta confusión con el método basado en doblar el peso del árbol generador minimal. Algunos alumnos olvidaron volver a A y, por consiguiente, no obtuvieron un ciclo hamiltoniano.

En el apartado (b), los alumnos generalmente conocían bien el método. Algunos, para hallar un árbol generador minimal, utilizaron el algoritmo del vecino más próximo en lugar de utilizar el de Kruskal. Luego hubo alumnos que olvidaron añadir las dos aristas que están conectadas a A. Y hubo otros que, a pesar de utilizar el método correcto, cometieron errores por no darse cuenta de qué arista tenían que escoger.

Pregunta 3

El apartado (a) se resolvió bien.

En el apartado (b), la mayoría acertaron que daba una fórmula. Algunos respondieron con un número real cualquiera, mostrando con ello que no habían entendido bien la pregunta. Pocos se dieron cuenta de que el 7 implica que la base debe ser mayor que 7.

En el apartado (c), los alumnos generalmente llegaron hasta la ecuación de tercer grado, pero muchos luego olvidaron qué tipo de número tenía que ser n. Para justificar que no hay raíces enteras positivas es necesario escribir cuáles son las raíces. Hubo un par de soluciones realmente ingeniosas que, trabajando módulo n, llegaron hasta una contradicción.

Pregunta 4

En el apartado (a), los alumnos o lo hicieron todo bien y totalmente correcto o apenas consiguieron nada (resolviendo v_0, por algún motivo). Como era de prever, algunos alumnos olvidaron qué había que hacer para una raíz repetida. La variedad de respuestas en esta pregunta resultó sorprendente, puesto que se trata de un ejercicio con procedimiento estándar.

En el apartado (b), la inducción fuerte resultó ser un discriminador muy bueno. Algunos alumnos sabían exactamente lo que había que hacer y lo hicieron bien, mientras que otros no tenían ni idea. Algunos errores habituales fueron: no comprobar $n=1$ y 2, tratar de utilizar la inducción ordinaria y, el peor de todos, dar por cierto precisamente aquello que estaban tratando de demostrar.

En el apartado (c), la mayoría de los alumnos que obtuvieron las dos expresiones supieron cómo deshacerse del signo menos en los dos casos. Algunos alumnos no pudieron responder este apartado porque no habían respondido el apartado (a). En caso de haber obtenido una respuesta incorrecta en el apartado anterior, se podían obtener puntos por arrastre de error en este apartado.

Pregunta 5

Por lo general, los buenos alumnos dedujeron cómo resolver esta pregunta mientras que los alumnos más flojos se limitaron a escribir cualquier cosa que pudieran sacar del cuadernillo de fórmulas o hicieron dibujos de grafos concretos. Era importante usar bien la notación y no utilizar el mismo símbolo para cosas distintas.

En el apartado (a), a aquellos que consideraron el grafo completo les fue bien.

En el apartado (b), hubo cierta confusión, pues algunos alumnos no indicaron claramente a qué grafo le estaban aplicando la relación de Euler. Aquellos alumnos metódicos que utilizaron la notación apropiada dieron con la respuesta.

En el apartado (c), hubo nuevamente confusión con respecto a la aplicación de la desigualdad a ambos grafos. La mayoría de los alumnos se dieron cuenta de qué desigualdad tenían que aplicar. Muchos alumnos emplearon una buena técnica de examen para obtener los dos últimos puntos aun cuando no habían logrado la desigualdad cuadrática.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

Hubo algunos alumnos que no escribieron ningún comentario, explicación o razonamiento, lo que les hizo perder puntos. Es importante que los alumnos siempre lean y relean las preguntas lo más detenidamente posible. Por ejemplo, hubo algunos alumnos que en la pregunta 2 aplicaron el algoritmo del vecino más próximo empezando en cada uno de los vértices, uno por uno, y que utilizaron el método del vértice borrado borrando todos los distintos vértices uno por uno. Esto les hizo perder tiempo. En las preguntas se utilizan palabras concretas que tienen un significado específico. Con ellas, el examinador trata de guiar a los alumnos en la pregunta. Por ello, los alumnos siempre deben tratar de ver qué es lo que se les pide exactamente y cómo puede un apartado ayudarles a resolver apartados posteriores. Es bueno que consideren qué parte del programa de estudios se está evaluando en cada pregunta. Es fundamental que todos los alumnos hagan un examen de práctica y que su profesor lo corrija, lo puntúe y se lo devuelva para que puedan estudiarlo. De ese modo, entenderán mejor qué es lo que se espera que hagan en el examen. Siempre es bueno trabajar con exámenes del IB de convocatorias anteriores y ver cómo se puntúan, para mostrar a los alumnos el nivel que se requiere. Como en esta prueba se permite usar calculadoras, hay que enseñar a los alumnos a utilizarlas de manera eficiente para ahorrar tiempo (por ejemplo, resolviendo las ecuaciones polinómicas con la función PolySmlt de las calculadoras Texas Instrument). También hay que enseñar a los alumnos que en matemáticas no se demuestra una cosa si la utilizan como punto de partida, y explicarles que los examinadores nunca verán con buenos ojos que respondan $0 = 0$ sin aportar ningún tipo de demostración. Si un alumno introduce un símbolo que no aparece en el enunciado de la pregunta, es necesario que explique lo que representa. La pregunta 5 es un buen ejemplo de ello: un buen rotulado de las variables habría ayudado tanto a los alumnos como al examinador. Es bueno enseñar a los alumnos que, al final de cada apartado de una pregunta, comprueben si la respuesta que han dado es del tipo que pedía el enunciado (por ejemplo, si es un número entero, un número real redondeado a 3 cifras significativas, un árbol, una expresión, etc.).

Prueba 3 del Nivel Superior: Análisis

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 7	8 - 15	16 - 21	22 - 27	28 - 34	35 - 40	41 - 60

Comentarios generales

La mayoría de los alumnos trataron de resolver todas las preguntas aunque, en muchos casos, las respuestas ponían de manifiesto un cierto desconocimiento del contenido.

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Todas las preguntas que requerían una justificación parecieron resultarles difíciles a los alumnos. Con frecuencia, sus razonamientos fueron incompletos. Las siguientes áreas plantearon dificultades a los alumnos: la fórmula del error de Lagrange, los corolarios del teorema fundamental del cálculo, la transformación de ecuaciones diferenciales mediante sustitución o el uso de sumas parciales para establecer un límite superior en una serie convergente alternada. Muchos alumnos tampoco estaban familiarizados con el teorema del valor medio o tenían una idea muy vaga sobre este, y a aquellos alumnos que sí conocían el teorema les costó utilizarlo para establecer una desigualdad.

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Derivada de la serie de Maclaurin a partir del concepto; determinación de un factor de integración para obtener una ecuación diferencial exacta; integrales simples.

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas

Pregunta 1

La mayoría de los alumnos resolvieron el apartado (a) correctamente. Hubo unos pocos casos en los que los alumnos no siguieron las instrucciones y trataron de utilizar series conocidas. En otros pocos casos, cometieron errores en el cálculo de las derivadas que les impidieron lograr la máxima puntuación. Los alumnos también resolvieron correctamente el apartado (b) utilizando el desarrollo en serie de Maclaurin o la regla de L'Hôpital. También en este apartado, en la mayoría de los casos en que no lograron la máxima puntuación, esto se debió a errores en el cálculo de las derivadas. El apartado (c), por contra, no lo resolvieron bien; solo unos pocos alumnos demostraron estar familiarizados con esta parte del tema opcional. La mayoría de los alumnos citaron la fórmula y lograron hallar la 4ª derivada de f , pero luego no supieron utilizarla para obtener la respuesta solicitada; en otros casos, los alumnos sí obtuvieron una respuesta pero, a la hora de responder el subapartado (c)(ii), demostraron que apenas entendían lo que significaba.

Pregunta 2

Muchos alumnos respondieron correctamente esta pregunta. También hubo muchos otros que demostraron desconocer completamente esta parte del tema opcional; aquellos alumnos que reconocieron el teorema fundamental del cálculo resolvieron bien esta pregunta. Por lo general, los alumnos obtuvieron una puntuación muy baja o la máxima puntuación.

Pregunta 3

A pesar de que muchos alumnos consiguieron al menos algunos puntos en esta pregunta, sus respuestas demostraron que les costó plantear una demostración. Los alumnos citaron poco el teorema del valor medio, y con frecuencia se saltaron pasos. En gran medida ignoraron las condiciones que han de darse para que el teorema del valor medio se pueda aplicar y no razonaron los pasos que les habían llevado a la respuesta final.

Había desigualdades por todos lados, sin mucho significado y sin mostrar ningún desarrollo. Hubo algunos alumnos que trataron de resolver el ejercicio a la inversa y presentaron su procedimiento de tal forma que costaba mucho seguir su razonamiento. En el apartado (b), muchos alumnos ignoraron la instrucción "a partir de lo anterior" y se limitaron a utilizar la calculadora de pantalla gráfica para hallar los valores requeridos; en general, aquellos alumnos que sí tuvieron en cuenta la relación con el apartado (a) resolvieron acertadamente esta pregunta. Algunos alumnos adivinaron la respuesta y no presentaron la derivación analítica que se les pedía.

Pregunta 4

En el apartado (a) se detectaron algunos errores generalizados que revelaron una escasa comprensión de la regla de la cadena. A pesar de que muchos alumnos lograron llegar hasta el resultado final, la presentación de su trabajo distó mucho de lo que se espera en una pregunta de tipo "muestre que". El apartado (b) lo abordaron acertadamente utilizando tanto el método 1 (factor de integración) como el método 2 (separación de variables). El error más habitual fue omitir la constante de integración o cometer fallos al hallar su valor. Los alumnos que utilizaron el método 2 con frecuencia tuvieron problemas para integrar $\frac{1}{(1-z)}$ correctamente y para aislar z, lo que les restó puntos por precisión.

Pregunta 5

En el apartado (a), muy pocos alumnos presentaron una razón válida de por qué la serie era alternada. En la mayoría de los casos los alumnos se limitaron a reformular el enunciado de la pregunta diciendo que va cambiando de signo, e ignoraron completamente el intervalo sobre el que había que integrar la expresión para ir obteniendo los distintos términos de la serie.

En el subapartado (b)(i), la mayoría de los alumnos consiguieron 1 o 2 puntos por acometer la sustitución propuesta pero luego, en la mayoría de los casos, no supieron hallar los límites de integración correctos para la nueva variable y, a continuación, relacionar las expresiones de los términos consecutivos de la serie. En el subapartado (b)(ii) se vieron muy pocas respuestas acertadas; en algunos casos los alumnos sí reconocieron las condiciones que se tenían que cumplir para que la serie alternada fuera convergente, pero muy pocos estuvieron cerca de establecer que el límite del término general era cero.

En el apartado (c) se vieron algunos intentos acertados de utilizar sumas parciales aunque, una vez más, los alumnos tuvieron problemas para identificar qué se necesitaba para demostrar la respuesta dada. En la mayoría de los casos los alumnos se limitaron a verificar con la calculadora de pantalla gráfica que, ciertamente, para valores altos de n la serie se mantiene por debajo del límite superior dado, pero fueron incapaces de aportar un argumento válido que justificara dicha afirmación.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

- Enseñar todos los aspectos que aparecen en el programa de estudios de este tema opcional.
- Brindar a los alumnos oportunidades de poner a prueba su comprensión de los resultados del curso y hacer muchos ejemplos de demostraciones. Cuando haya que demostrar un resultado, se debe instar a los alumnos a asegurarse de que realmente han justificado cada paso de su hilo argumental.
- Dar una amplia variedad de ejemplos de ecuaciones diferenciales que pueden transformarse en los ejemplos estándar que aparecen en el programa de estudios utilizando las sustituciones apropiadas. Asegurarse de que los alumnos sepan que algunas ecuaciones diferenciales se pueden resolver de más de una forma.
- Proporcionar numerosos ejemplos de aplicaciones de los teoremas sobre funciones derivables y continuas, como el teorema del valor medio y sus corolarios. Explicar en detalle qué condiciones son necesarias para poder aplicar el teorema del valor medio.
- Brindar ejemplos de uso de la fórmula de error de Lagrange y discutir su significado.
- En clase, los profesores deben seguir haciendo hincapié en la importancia de los términos de instrucción, como "mostrar que", "a partir de lo anterior" o "deducir". Asimismo, deben asegurarse de que los alumnos entiendan el significado y las expectativas que llevan aparejadas estos términos en el contexto de la resolución de problemas.
- Algunos alumnos tienen un nivel claramente insuficiente para el curso de Matemáticas NS. Sería útil que, al comienzo del Programa del Diploma, los colegios se aseguraran de que los alumnos se han inscrito en los cursos apropiados. En este

tema opcional, es fundamental que los alumnos conozcan las técnicas básicas de derivación e integración. Los profesores deben valorar detenidamente el tema opcional elegido si enseñan a alumnos muy flojos.

Prueba 3 del Nivel Superior: Conjuntos, relaciones y grupos

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 9	10 - 18	19 - 26	27 - 32	33 - 39	40 - 45	46 - 60

Comentarios generales

Las matemáticas de la opción "Conjuntos, relaciones y grupos" difieren bastante de las otras tres opciones ya que giran en torno a conceptos muy abstractos, en lugar de basarse en la aplicación de reglas mecánicas. Por este motivo, la demostración y el razonamiento lógico son muy importantes en esta opción.

La mayoría de los alumnos trataron de responder todas las preguntas, aunque en algunos casos las respuestas dadas a las últimas tres preguntas guardaban poca relación con lo que se les pedía que hicieran.

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Muchos alumnos usaron sinónimos matemáticos como si constituyeran una demostración en toda regla. Por ejemplo, limitarse a decir que una función es "uno a uno” no equivale a demostrar formalmente que la función es inyectiva.
- Hallar clases de equivalencia.

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

- La definición de grupo y los conceptos asociados: tablas de Cayley, simétricos, el orden de un elemento, subgrupos, etc.
- La definición de relación de equivalencia

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas

Pregunta 1

En el apartado (a), la mayoría de los alumnos fueron capaces de completar correctamente la tabla de Cayley.

El apartado (b), por lo general, se resolvió bien. Sin embargo, no basta con que los alumnos digan algo así como "observando la tabla de Cayley, vemos que la operación es cerrada o que hay simétricos". Algunos alumnos pensaron que lo único que tenían que demostrar era que se cumplía la propiedad conmutativa.

El apartado (c) con frecuencia lo resolvieron acertadamente. Hubo unos pocos alumnos que incluyeron en la respuesta subgrupos adicionales que, por consiguiente, eran incorrectos.

En el apartado (e), la mayoría de los alumnos solo hallaron una solución (normalmente la más obvia $x=2$, aunque también hubo algunos que hallaron solo la menos obvia $x=7$).

Pregunta 2

En el apartado (a), la mayoría de los alumnos estaban familiarizados con la terminología de las condiciones que ha de cumplir una relación para ser una relación de equivalencia. La demostración varió mucho de unos alumnos a otros. Resultó irritante ver afirmaciones del tipo "R es simétrica porque $aRb = bRa$ o $aRa = a^n - a^n = 0$", a menudo sin mencionar mod p; tales respuestas no recibieron la máxima puntuación.

El apartado (b) no lo resolvieron bien. Pocos alumnos demostraron algún tipo de estrategia para hallar las clases de equivalencia.

Pregunta 3

Un número sorprendentemente elevado de alumnos perdieron el tiempo en mostrar que la aplicación f era una aplicación biyectiva, cuando era algo que ya se decía claramente en el enunciado. Muchos alumnos no obtuvieron la máxima puntuación por no usar debidamente la información dada en el enunciado, que indicaba que el grupo era abeliano. También hubo alumnos que dibujaron el gráfico de $y=\frac{1}{x}$ o que dieron por hecho que el simétrico de x era su recíproco, cosa que resulta inaceptable en el contexto de una pregunta abstracta sobre grupos.

Pregunta 4

En el apartado (a) y el subapartado (b)(i), aquellos alumnos que formularon la respuesta en función de las definiciones matemáticas básicas de función inyectiva y función sobreyectiva, por lo general, respondieron acertadamente. Por el contrario, las explicaciones del tipo "f es una función de 'uno a uno' $\Rightarrow f$ es inyectiva" o "g es sobreyectiva porque su recorrido es igual a su codominio" no recibieron ningún punto.

En el subapartado (b)(ii), fue sorprendente ver que algunos alumnos fueron incapaces de relacionar lo que habían hecho en el subapartado (b)(i) con este subapartado.

Pregunta 5

Esta era una pregunta abstracta y claramente definida sobre un subgrupo. Hubo demasiados alumnos que dedujeron casi de inmediato, y erróneamente, que todo el grupo era abeliano y no pudieron lograr casi ningún punto.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

En matemáticas, la noción de "demostración" y el uso de argumentos lógicos dotados de una base sólida son muy importantes, especialmente en la opción "Conjuntos, relaciones y grupos". Cuanto antes se exponga a los alumnos a estas formas de pensar, tanto mejor.

Aunque esta opción trata sobre conceptos matemáticos muy abstractos, dichos conceptos se pueden enseñar apoyándose en un amplio abanico de ejemplos concretos: conjuntos de números discretos y continuos, aritmética modular, permutaciones y transformaciones de conjuntos, incluidas las simetrías de figuras planas.

Hay que animar a los alumnos a que demuestren procedimientos matemáticos en lugar de basarse en explicaciones verbales. Con demasiada frecuencia, este tipo de desarrollos (los basados en explicaciones verbales) parecen ser tautológicos o carecen de sentido.

Prueba 3 del Nivel Superior: Estadística y probabilidad

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 9	10-19	20-29	30 - 34	35 - 40	41 - 45	46 - 60

Comentarios generales

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Muchos alumnos no tenían más que una comprensión superficial de la teoría sobre las estimaciones.

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

La mayoría de los alumnos se muestran seguros al utilizar la calculadora de pantalla gráfica.

La mayoría de los alumnos son capaces de resolver problemas que incluyen combinaciones lineales de variables aleatorias normales.

Respecto a los últimos años, ha habido una mejora en la comprensión y el uso de las funciones generatrices de probabilidad.

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas

Pregunta 1

Los alumnos resolvieron muy bien el apartado (a); muy pocos (los más flojos) utilizaron 0,8 en vez de 0,841.

El apartado (b) también lo resolvieron bien, y solo hubo unos pocos alumnos que calcularon incorrectamente la varianza.

El apartado (c) también lo resolvieron acertadamente. El error más habitual (aunque no hubo muchos casos) fue escribir la varianza de $Y - 2X$ como $\mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Var}(X)$ o como $\mathrm{Var}(Y) - 2(or\ 4)\mathrm{Var}(X)$.

Pregunta 2

Los alumnos resolvieron bien el apartado (a) y solo unos pocos utilizaron símbolos inapropiados, como r o μ. Asimismo, solo unos pocos alumnos no se dieron cuenta de que el enunciado de la pregunta indicaba que hacía falta utilizar un contraste de dos colas.

El contraste del apartado (b), por lo general, lo hicieron bien y hallaron correctamente el valor de p. Los errores más habituales fueron utilizar un número de grados de libertad incorrecto y evaluar un valor de p de una cola (en lugar de un valor de p de dos colas).

En el apartado (c), muchos alumnos se dieron cuenta de que los resultados de los apartados anteriores indicaban que no se debía utilizar la recta de regresión, porque las variables habían resultado ser independientes. Sin embargo, no fue infrecuente encontrar razonamientos incorrectos como que había que utilizar la recta de regresión de x sobre y, o que no había datos suficientes.

Pregunta 3

Las soluciones dadas en el apartado (a) fueron, con frecuencia, bastante decepcionantes. Algunos alumnos parecían estar confundidos con la notación utilizada.

En el subapartado (b)(i), muchos alumnos evaluaron la media de la muestra como 5,1, pero algunos no supieron convertir este valor en la estimación 10,2 aunque hubieran hallado correctamente el valor de k.

En el subapartado (b)(ii), muy pocos alumnos se dieron cuenta de que θ = 10,2 no era una estimación factible, teniendo en cuenta que uno de los valores de la muestra era 10,3.

Las soluciones dadas al apartado (c) fueron, en general, deficientes.

En el subapartado (c)(i) se vieron muchas respuestas acertadas, aunque algunos alumnos no tuvieron en cuenta la diferencia que existe entre $\mathrm{Var}(X)$ y $\mathrm{Var}(\bar{X})$.

En el subapartado (c)(ii), muchos alumnos pensaron que $\mathrm{E}(\bar{X}^2) = [\mathrm{E}(\bar{X})]^2$, aunque esto tuvo la desafortunada consecuencia de mostrar que U^2 es un estimador sin sesgo de θ^2. Pocos alumnos se dieron cuenta de que se podía hallar una expresión para $\mathrm{E}(U^2)$ partiendo del resultado estándar de que $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{E}(U^2) - [\mathrm{E}(U)]^2$ o de la expresión equivalente para $\mathrm{Var}(\bar{X})$. El subapartado (c)(iii) resultó inaccesible para aquellos alumnos que no habían logrado resolver el (c)(ii).

Pregunta 4

La mayoría de los alumnos indicaron las hipótesis correctas en el apartado (a).

En el subapartado (b)(i), todos hallaron correctamente la media. En cambio, para hallar la estimación de la varianza, hubo bastantes alumnos que dividieron entre 20 en lugar de entre 19 y, en los pasos siguientes de este subapartado, arrastraron varianzas incorrectas. En cuanto al test *t* de Student, generalmente los alumnos lo aplicaron bien y extrajeron la conclusión correcta. Sin embargo, resultó sorprendente que muchos alumnos utilizaran la fórmula apropiada para hallar el valor de *t* y, a partir de ahí, el valor de *p*, en lugar de utilizar el software de la calculadora de pantalla gráfica.

En general, los alumnos resolvieron bien el apartado (c).

Pregunta 5

En el apartado (a), fue decepcionante observar que muy pocos alumnos se dieron cuenta de que podían hallar $P(Y = y)$ integrando $f(x)$ entre y y $y+1$. Aquellos alumnos que se limitaron a integrar $f(x)$ para hallar la función de distribución acumulada de X no recibieron ningún punto a menos que hubieran tratado de utilizar su resultado para hallar la distribución de probabilidad de Y .

Las soluciones al subapartado (b)(i) fueron buenas, por lo general, aunque algunos alumnos perdieron puntos por no incluir el término $y = 0$.

En general, el subapartado (b)(ii) también lo resolvieron bien. La mayoría de los alumnos utilizaron la calculadora de pantalla gráfica para evaluar $G'(1)$.

Aquellos alumnos que intentaron derivar $G(t)$ por métodos algebraicos con frecuencia acabaron cometiendo errores.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

Aunque, en general, los alumnos se sienten seguros utilizando la calculadora de pantalla gráfica, todavía hay algunos que usan métodos escritos a mano para evaluar los valores de p y los valores estadísticos, cuando resulta mucho más eficiente utilizar la calculadora de pantalla gráfica.

Parece que habría que dedicar más tiempo en clase a la teoría sobre las estimaciones, para asegurarse de que los alumnos la entiendan bien.

Se debe aconsejar firmemente a los alumnos que presten atención a las siguientes instrucciones que figuran en el cuestionario de examen: "Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas".