Informes generales de la asignatura, mayo de 2015

Matemáticas NS TZ2

Límites de calificación de la asignatura

Matemáticas discretas

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 13	14 - 27	28 - 41	42 - 53	54 - 65	66 - 75	76 - 100

Análisis

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 13	14 - 28	29 - 40	41 - 52	53 - 64	65 - 74	75 - 100

Conjuntos, relaciones y grupos

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 12	13 - 26	27 - 39	40 - 50	51 - 61	62 - 71	72 - 100

Estadística y probabilidad

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 13	14 - 27	28 - 40	41 - 52	53 - 63	64 - 74	75 - 100

Para proteger la integridad de los exámenes, cada vez se están utilizando más variantes de los exámenes según la zona horaria donde se realicen. Al recurrir a variantes del mismo examen, los alumnos ubicados en una parte del mundo no estarán respondiendo siempre al mismo cuestionario de examen que los alumnos ubicados en otras partes del mundo. Se sigue un proceso muy riguroso para garantizar que las diversas variantes del examen sean comparables en lo que respecta a su dificultad y a la cobertura del programa de estudios, y se toman las medidas pertinentes para garantizar que se apliquen las mismas normas de calificación a todos los exámenes escritos de los alumnos, independientemente de cuál haya sido la versión del examen a la que hayan respondido. Para la convocatoria de mayo de 2015 el IB ha elaborado variantes de la Prueba 1 y la Prueba 2 del examen de Matemáticas NS para las distintas zonas horarias.

Evaluación interna del Nivel Superior

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 2	3 - 5	6 - 8	9 - 11	12 - 14	15 - 16	17 - 20

Ámbito y adecuación del trabajo entregado

Se entregaron un amplio abanico de temas adecuados, aunque de muy diversa calidad. Por lo general las exploraciones se basaron en temas que habían elegido los propios alumnos. No obstante, en algunos casos quedó patente que el profesor les había dicho a los alumnos qué tema tenían que elegir y, posiblemente, les proporcionó además demasiada orientación. También se observó un abanico muy amplio de niveles de adecuación del trabajo entregado. Algunos trabajos contenían un sello distintivo de creatividad muy interesante en lo que respecta al uso de temas de Matemáticas NS, mientras que otros trabajos o bien tenían un contenido mínimo de matemáticas o eran una mera reproducción de problemas clásicos del estilo de los que aparecen en los libros de texto. Un fenómeno interesante que se observó es la transcripción de vídeos de matemáticas publicados en "Numberphile" o en "Khan Academy". Aunque no es inusual que dichos videos sirvan de estímulo para la elección del tema, habría que recordarles a los alumnos que es muy difícil que logren puntuaciones altas a no ser que el profesor o moderador sea capaz de hallar pruebas de implicación personal y reflexión crítica en la respuesta que hayan escrito. Muchos alumnos optaron por exploraciones basadas en la utilización de modelos matemáticos. Los proyectos que más alumnos abordaron fueron el del movimiento de un proyectil, la elaboración de modelos para la propagación de una enfermedad y los modelos logísticos para describir el crecimiento de tumores. Lamentablemente, la mayoría de los alumnos partieron de una ecuación diferencial para elaborar el modelo al que obedece el fenómeno elegido; definieron las variables en el contexto de la exploración, e integraron la ecuación para obtener un modelo pertinente, pero sin ser capaces de interpretar por qué o de qué modo es válida la ecuación diferencial de la que habían partido. Algunos alumnos eligieron temas que se salían con creces de la asignatura de Matemáticas NS, con lo que el trabajo elaborado resultaba, en gran medida, inasequible para sus propios compañeros de curso. De hecho, algunas exploraciones estaban tan alejadas de la base de conocimientos que esperaba el profesor o moderador que resultaban en gran medida incomprensibles y muy difíciles de moderar. En el otro extremo del espectro encontramos también una serie de exploraciones superficiales que no estaban acordes con el nivel de la asignatura. Algunos de estos casos eran informes sobre temas de historia de las matemáticas que los alumnos habían investigado, pero sin incluir apenas contenido matemático.

Unos cuantos alumnos utilizaron medios tecnológicos para obtener funciones de regresión, en un intento de modelizar los datos recabados. Algunos de estos trabajos venían respaldados por conceptos matemáticos que dejaron patentes un buen conocimiento y comprensión del modelo. La mayoría de las veces el alumno simplemente creó y aplicó el modelo de regresión con ayuda de medios tecnológicos, demostrando así tener un grado de comprensión muy limitado.

Una de las principales preocupaciones sigue siendo el problema de las citas y las referencias. Hay que insistir a los alumnos en que es muy importante incluir referencias cada vez que se cita o se menciona una fuente externa. Recomendamos que los profesores proporcionen a los alumnos el documento *La probidad académica en el Programa del Diploma* y que discutan en clase las posibles consecuencias de una conducta improcedente.

La mayoría de los alumnos redactaron una exploración cuya longitud estaba dentro del número recomendado de páginas, aunque algunas respuestas fueron demasiado largas.

Desempeño de los alumnos con relación a cada criterio

Criterio A

La mayoría de los alumnos abordaron bien este criterio, pues entregaron trabajos coherentes y organizados (aunque unos más que otros). Se observó que algunos alumnos incluyeron apéndices para que la longitud de la exploración estuviera entre las 6 y las 12 páginas. Sin embargo, con esta maniobra la exploración perdió toda coherencia, pues el lector tenía que consultar el apéndice para poder entender el trabajo realizado.

Algunos profesores orientaron a sus alumnos para que elaboraran un índice y un cómputo de palabras, y los incluyeron en su tabla de evaluación. No es necesario hacer ninguna de estas dos cosas en la exploración. En este criterio algunos problemas se debieron a que los alumnos trataron de explicar cosas que se escapaban de su propia comprensión porque el tema elegido se salía con creces del nivel de la asignatura. Los profesores deberían recordar que no se debe penalizar dos veces a un alumno por un mismo fallo. Tal y como se ha mencionado anteriormente, es absolutamente fundamental que los alumnos citen la fuente de cualquier información que hayan tomado prestada y que incluyan una referencia cada vez que aparezca una mención en el trabajo.

Criterio B

La mayoría de los alumnos obtuvieron buenos resultados en este criterio. Sin embargo, hubo algunos alumnos que incluyeron páginas con gráficos irrelevantes, que ni siquiera estaban rotulados, o información en forma de hojas de cálculo que no resultaba necesaria. Algunos profesores perdonaron el uso indebido de notación de calculadora en la redacción del trabajo, lo que conllevó una variación en el nivel de logro concedido por el profesor.

Criterio C

Una vez más este criterio volvió a ser el que más les costó interpretar a los profesores, si bien es cierto que hubo una mejora general respecto a mayo de 2014. Es muy importante que tanto profesores como y alumnos entiendan bien el ámbito que abarca este criterio. Transcribir trabajos que se pueden encontrar fácilmente en un libro de texto, en un sitio web o en un videoclip no permite que la voz del alumno se deje oír en la exploración. Se supone que los alumnos han de resolver alguna curiosidad como resultado del estímulo utilizado. Fue una pena observar que algunos profesores no buscaron con ahínco indicios de implicación personal en el trabajo de sus alumnos, sino que, en relación con este criterio, evaluaron a sus alumnos de manera un tanto subjetiva. Esto condujo con frecuencia a la concesión de niveles sin mucha coherencia. Un comentario habitual, para justificar que se hubiera concedido un nivel bajo, fue que "el alumno no estaba suficientemente comprometido". Por otro lado, algunas exploraciones eran muy originales y dejaban entrever el entusiasmo del alumno por el tema, pues esta energía se hacía patente al ir leyendo el trabajo escrito.

Criterio D

A menudo observamos que no todos los profesores y alumnos habían entendido bien este criterio. Algunos alumnos que presentaron una exploración basada en la elaboración y aplicación de modelos pensaron que lo que se esperaba de ellos eran reflexiones generales sobre matemáticas y su posterior aplicación a un contexto de la vida real. Hay indicios que sugieren que los profesores han orientado a los alumnos para que discutieran el ámbito de aplicación y las limitaciones, como si aún estuvieran trabajando en las tareas de las antiguas carpetas de evaluación interna. Habría que tener en cuenta también que la reflexión crítica tiene un componente metacognitivo que requiere aislar un problema, valorarlo desde perspectivas distintas y analizar los hallazgos. También puede requerir vincular su trabajo con otros problemas o plantear otras preguntas que no habían surgido al inicio del proceso. De nuevo, aconsejamos a los profesores que consulten el documento *Matemáticas NS: Notas adicionales y orientación sobre la exploración*, que pueden encontrar en el CPEL.

Es interesante resaltar que aquellos alumnos que lograron un nivel elevado en este criterio también obtuvieron una muy buena puntuación en el criterio C, puesto que al hacer el esfuerzo de superar los defectos o carencias que ellos creen que tenían lograron demostrar también que tenían una implicación personal con su trabajo.

Criterio E

Hubo una gran variedad de contenido matemático, que iba desde conceptos matemáticos muy básicos a ampliaciones del curso de NS que se salían con creces del ámbito de la exploración. En cualquiera de esos dos casos extremos, conseguir un 6 sigue siendo una empresa difícil de alcanzar. Aquellos alumnos que optaron por explorar conceptos más abstractos se mostraron incapaces de demostrar su comprensión de los conceptos matemáticos utilizados, y algunos alumnos que escogieron exploraciones sobre la elaboración de modelos no lograron ir más allá del trabajo mecánico que se requiere para resolver una ecuación diferencial y, por consiguiente, no demostraron poseer una comprensión más profunda del tema. En esta convocatoria hubo más exploraciones que lograron una nota alta que las que hubo en mayo de 2014.

Recomendaciones para la enseñanza a futuros alumnos

- Se han visto indicios que sugieren que algunos profesores no han dedicando a la exploración el número estipulado de horas. Es imprescindible que se dediquen 10 horas lectivas a orientar a los alumnos durante el proceso de exploración.
- Los alumnos tienen que contar la historia del desarrollo de su exploración. Un objetivo general claro y bien enfocado al que se vaya haciendo referencia a medida que va avanzando la exploración resultará útil para la organización y la coherencia del trabajo.
- Los alumnos deberían preguntarse a sí mismos si es probable que algún otro alumno reproduzca la misma exploración. Si la respuesta es "sí", en ese caso es poco probable que logre un nivel alto en el criterio E. La exploración debería ser algo personal para el alumno y, por ello, la probabilidad de que otro alumno escriba algo parecido debería ser mínima.
- Es necesario que los profesores consulten el material de ayuda al profesor así como el documento *Matemáticas NS: Notas adicionales y orientación sobre la exploración*; ambos pueden encontrarse en el CPEL.
- A los profesores se les desaconseja encarecidamente que obliguen a realizar un tipo de exploración concreta.
- Los profesores han de dar muestras de que han calificado las exploraciones mediante marcas de verificación (tics), que indiquen los lugares en que las matemáticas empleadas son correctas y que identifiquen los errores cometidos. Las anotaciones y los comentarios se deberían escribir directamente junto a las respuestas por escrito de los alumnos. El profesor evalúa el trabajo y el papel del moderador es ratificar los niveles de logro que ha concedido el profesor, no es puntuar el trabajo.
- Tanto los profesores como los alumnos tienen que actuar conforme a los principios de probidad académica. Hay que citar la fuente de la que proviene cada referencia, imagen o gráfico en el lugar preciso del texto en el que se utilice. Algunos alumnos se limitaron a incluir una bibliografía, sin añadir las correspondientes citas en el cuerpo de la respuesta escrita. La no inclusión de citas o referencias intertextuales puede conllevar la revisión del trabajo por parte del IB.
- Es necesario enviar el trabajo original del alumno para someterlo a moderación. Cuando se imprima el trabajo para su evaluación o moderación, el profesor debería ser consciente de que la impresión en blanco y negro puede dificultar la tarea del moderador a la hora de revisar gráficos o tablas.
- Los profesores deben hacerles llegar a los alumnos sus comentarios y opiniones escribiéndolos directamente en las hojas de respuestas por escrito. Aquellos comentarios que se limitan a repetir los descriptores de los niveles de logro no resultan útiles.
- Uno de los aspectos de los enfoques de la enseñanza y el aprendizaje incluidos en el Programa del Diploma es alentar y estimular a los alumnos para que desarrollen habilidades de expresión escrita y de investigación en el campo de las matemáticas. Esto se puede lograr asignando a los alumnos pequeñas tareas, ofreciéndoles la oportunidad de leer y analizar distintas formas de escritura matemática, así como estableciendo vínculos con la Teoría del Conocimiento (TdC) y el CAS.
- Uno de los problemas sigue siendo que los profesores realizan pocas anotaciones o comentarios al margen sobre el trabajo individual de cada alumno. Algunos colegios, en el formulario 5/EXCS, enviaron copias limpias de las exploraciones con comentarios

muy breves y de carácter general, lo que hizo que el moderador se viera obligado a calificar la exploración, en lugar de moderarla. Con mucha frecuencia los moderadores encuentran errores matemáticos, los que sugiere que el profesor no había revisado y verificado el trabajo convenientemente. Lamentablemente, esto tiene como resultado que no se confirmen los niveles de logro concedidos, lo que, a su vez, afecta negativamente a las calificaciones del colegio en su conjunto.

- Unos cuantos colegios utilizaron la versión antigua del formulario 5/EXCS en vez de la más reciente, lo que hizo que a los profesores les resultase más fácil realizar comentarios más pertinentes. Resultó sorprendente comprobar que algunos de estos formularios los habían rellenado los propios alumnos.
- El documento *Matemáticas NS: Notas adicionales y orientación sobre la exploración* ha resultado ser de gran utilidad para algunos colegios, pero también hubo indicios que apuntan a que unos cuantos profesores no conocían la existencia de este documento.

Comentarios adicionales

- Parece que este año hubo exploraciones más mediocres que en mayo de 2014. Estas eran en muchos casos exploraciones enviadas con un total de 5 puntos o menos. Se anima a los profesores a hablar a los alumnos sobre la importancia de la evaluación interna y cómo ésta afecta a la nota final del IB, así como sobre el valor intrínseco que tiene para un miembro de la comunidad de aprendizaje del IB.
- Por lo general, a los moderadores las exploraciones les resultan mucho más interesantes de moderar que las antiguas tareas. Sin embargo, parece que algunos alumnos se decantan por temas "seguros" (poco arriesgados), como la estadística o el movimiento de un proyectil.
- La sensación general, tras analizar el abanico de exploraciones enviadas, es que los beneficios que aporta la exploración, en tanto que trabajo independiente sobre un tema elegido por el alumno, tienen mucho más peso que su utilidad como herramienta de evaluación discriminatoria. La ponderación del 20 % parece ser la adecuada, ya que aquellos alumnos que están bien preparados y que han recibido una orientación apropiada por parte de sus profesores suelen obtener una nota bastante buena, mientras que aquellos alumnos cuyos profesores no ofrecen la suficiente orientación parece que obtienen notas bajas.
- Los profesores deberían intentar convencer a los alumnos de que no traten de escribir una exploración sobre un tema que resulte en gran medida inasequible para ellos. Resulta muy complicado escribir sobre esos temas de un modo que la exploración resulte legible (es decir, comprensible y amena) para sus compañeros. Muchas veces vemos que estos alumnos no son capaces de demostrar una comprensión profunda del tema y, por consiguiente, no pueden realizar ninguna reflexión crítica y con sentido.

Prueba 1 del Nivel Superior

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 17	18 - 34	35 - 47	48 - 59	60 - 72	73 - 84	85 - 120

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Integración por sustitución (en concreto, la sustitución *t*), números complejos, demostración mediante inducción.

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Probabilidad básica, desarrollo de la potencia de un binomio, puntos estacionarios, bosquejo y manejo de funciones.

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1

Esta pregunta constituyó un comienzo adecuado y sencillo para muchos de los alumnos. Un reducido grupo de alumnos abordaron la pregunta dando por hecho desde el principio que las probabilidades eran independientes.

Pregunta 2

Esta fue otra pregunta que ofrecía un comienzo fácil. Sin embargo, un número sorprendente de alumnos no escribió los términos en potencias ascendentes de x.

Pregunta 3

Para ser una pregunta cercana al inicio de la prueba hay que decir que los resultados, por lo general, fueron bastante pobres. Muchos alumnos perdieron puntos porque dieron la respuesta en radianes. También hubo muchos que anularon la solución "cero" al dividir entre $\tan x$ a ambos lados de la ecuación y algunos otros dieron 360° como solución posible.

Pregunta 4

En general los alumnos resolvieron muy bien esta pregunta. En algunas ocasiones se perdieron puntos por culpa de errores de cálculo cometidos por descuido (en el apartado b). Solo hubo unos pocos alumnos que parecieron no captar el significado de "función decreciente".

Pregunta 5

En general los alumnos resolvieron muy bien esta pregunta. Muchos de ellos parecieron estar bien preparados para responder este tipo de preguntas, pues dieron soluciones concisas.

Pregunta 6

Esta pregunta parece que dividió a los alumnos: mientras que algunos no tuvieron problema alguno para resolverla, otros hicieron un intento tímido para abordarla utilizando el teorema del seno o el teorema del coseno. En ocasiones se vio como respuesta final un ángulo de $\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$, en vez de $\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$. Muchos alumnos que no fueron capaces de dar con el resultado correcto en el primer apartado fueron luego capaces de abordar el segundo apartado. No obstante, fueron habituales los errores al hacer la derivada; de hecho, hubo muy pocos alumnos que fueran capaces de obtener el resultado correcto en este apartado de la pregunta.

Pregunta 7

Esta pregunta la hicieron sorprendentemente mal. Un número significativo de alumnos parecían no tener ni idea de por dónde empezar, mientras que otros fracasaron bastante estrepitosamente tratando de aplicar el teorema de De Moivre. Muchos alumnos (que, por lo demás, son buenos) obtuvieron un valor negativo en los módulos, pues aparentemente no eran conscientes de la convención requerida de que $r > 0$. Una respuesta dada en el enunciado del segundo apartado provocó que muchos alumnos perdieran puntos por arrastre de error que, de otro modo, podrían haber conseguido si no se hubieran empeñado en trabajar en pos de un objetivo imposible.

Pregunta 8

Se vieron muy pocas respuestas completamente correctas en esta pregunta. La mayoría de los alumnos recibieron un punto por tratar de derivar la sustitución, pero luego tuvieron muchos problemas para seguir avanzando. Algunos alumnos fueron capaces de dar con un integrando correcto en función de t únicamente, pero luego cometieron un error con el factor numérico.

Pregunta 9

Realmente no se observó ningún patrón en las respuestas que se dieron en el apartado (a). En cuanto al apartado (b), la mayoría de los alumnos fueron capaces de cambiar correctamente la base del logaritmo, pero luego utilizaron incorrectamente las propiedades de los logaritmos. La mayoría de los alumnos lograron aproximadamente la mitad de los puntos que tenía asignados la pregunta, pero fue raro que un alumno consiguiera la máxima puntuación en ambos apartados.

Pregunta 10

La mayoría de los alumnos empezaron con buen pie esta pregunta. Sin embargo, todavía hay una minoría significativa de alumnos que piensan que la notación correspondiente a "función inversa" significa "hallar la derivada". Parece que los apartados (d) y (e) eran inasequibles para la mayoría. Se esperaba que los alumnos utilizasen el gráfico del apartado (a) más de lo que lo utilizaron, o que al menos hiciesen referencia a él, aunque lo cierto es que muchos parecían estar muy poco familiarizados con la resolución de desigualdades utilizando algún tipo de método gráfico.

Pregunta 11

La mayoría de los alumnos hicieron un esfuerzo razonable para tratar de resolver los tres primeros apartados, aunque un número sorprendente de ellos fueron incapaces de calcular el valor numérico correcto que se les pedía en el apartado (c), a pesar de haber derivado la expresión correctamente. En el apartado (d), el número de respuestas correctas no llegó a diez, puesto que la mayoría de los alumnos no fueron en absoluto conscientes de la necesidad de incluir el signo del módulo y tampoco repararon en el hecho de que el área en cuestión estaba por debajo del eje x. Este apartado de la pregunta probablemente resultó ser el más difícil de toda la prueba.

Pregunta 12

Los alumnos mejor preparados fueron capaces de lograr una puntuación alta en esta pregunta. Una correcta manipulación algebraica tenía aquí una importancia primordial; de hecho, hubo muchos errores de signo en todos los apartados que conllevaron una pérdida de puntos. Un error habitual fue dar por hecho que la diferencia común de la progresión era igual a 1, por algún motivo. Al menos fue grato comprobar que más alumnos de los esperados trataron de "hincarle el diente" a los apartados (b) y (c), y a un porcentaje significativo de los mismos les resultó sencillo demostrar que una de las raíces era igual a 2. Solo los mejores alumnos fueron capaces de responder con éxito el apartado (c), y en esos casos se vieron con frecuencia soluciones redondas y bien presentadas (en el más amplio sentido de la expresión).

Pregunta 13

La mayoría de los alumnos fueron capaces de responder con cierto éxito los dos primeros apartados, aunque también se vieron algunos ejemplos de manipulación incorrecta. La demostración mediante inducción es un concepto complejo; hubo muchos alumnos que no plantearon el ejercicio con claridad, lo que hizo que sus razonamientos fueran difíciles de seguir. La presentación resulta primordial en este tipo de preguntas y, dado que se pedía una "prueba", los examinadores lo que tenían que buscar era una comunicación matemática clara y comprensión por parte del alumno.

De hecho, muy pocos alumnos fueron capaces de dar respuesta a lo que se pedía en el apartado (c): a pesar de que algunos de ellos fueron capaces de lograr 3 o 4 puntos, con frecuencia fue por "cantar una lección bien aprendida de memoria"; p. ej., planteando una suposición clara, comunicando claramente lo que estaban intentando demostrar o tratando de comunicar que iban a acometer el paso de la inducción.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

Los alumnos necesitan más "práctica" con las integrales (sustituciones con las que no estén familiarizados) y más práctica o comprensión del teorema de De Moivre.

Es necesario insistir a los alumnos para que lean con detenimiento la pregunta y tengan muy presente cómo han de presentar la respuesta. Por ejemplo, ¿en grados o en radianes?

Presentación general, especialmente en lo que respecta a las preguntas sobre inducción.

Prueba 2 del Nivel Superior

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 16	17 - 33	34 - 49	50 - 63	64 - 76	77 - 90	91 - 120

Comentarios generales

Esta prueba le resultó asequible a la mayoría de los alumnos. Fue agradable observar la mejora lograda en el uso de la calculadora de pantalla gráfica y a la hora de dar respuestas con la precisión requerida. La mayoría de los alumnos contestaron todos los apartados de las preguntas; no obstante, la mayoría no se dieron cuenta de que la última parte de la pregunta 10 versaba sobre la probabilidad condicionada, y en la pregunta 7 solo unos pocos fueron capaces de enumerar correctamente los valores de los parámetros, con lo que en esta prueba fue raro ver notas muy altas. Los conceptos de cinemática de la pregunta 12 resultaron ser todo un desafío para muchos alumnos, pues tuvieron problemas con el punto de partida y con la continuidad mencionada en la función por tramos. En la pregunta 13, ya al final de la prueba, el último apartado sobre vectores les superó completamente a muchos alumnos.

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Reducción de filas y determinación del número de soluciones que tiene un sistema de tres ecuaciones lineales con parámetros.
- Reconocer un problema de probabilidad condicionada en un contexto ligeramente distinto del habitual.

- Transformaciones de gráficos.
- Continuidad en el contexto de las funciones definidas por tramos.
- Interpretar un problema de cinemática.
- Dibujar un diagrama adecuado a partir de la información contenida en el enunciado para responder a una pregunta de tipo "mostrar que".
- Aplicar conceptos de vectores relacionados con la distancia.

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

- Aplicación rutinaria de fórmulas
- Análisis
- Distribuciones de probabilidad
- Métodos para realizar recuentos
- Derivación implícita
- Trigonometría

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1

Por lo general, la mayoría de los alumnos resolvieron bien el apartado (a). Algunos trataron de calcular la altura del triángulo para luego hallar el área. Esto puso de manifiesto que no sabían utilizar la fórmula alternativa para calcular el área de un triángulo.

Por el contrario, la inmensa mayoría de los alumnos resolvieron bien el apartado (b), y aquellos que no lograron la máxima puntuación normalmente fue porque tenían la calculadora de pantalla gráfica en modo radianes o por haber redondeado los valores demasiado pronto.

Pregunta 2

La mayoría de los alumnos respondieron satisfactoriamente a esta pregunta; solo hubo unos pocos que utilizaron permutaciones o que sumaron los valores combinatorios en vez de multiplicarlos. Hubo muchos alumnos que trataron de hallar directamente (c), en vez de hallar primero el complementario [número de grupos que no contienen ninguna mujer].

Pregunta 3

En esta pregunta la mayoría de los alumnos fueron capaces de obtener la máxima puntuación o, al menos, una puntuación elevada. No obstante, algunos perdieron puntos por no dibujar el gráfico en el dominio indicado y otros se negaron a creer que había un vértice en el gráfico y optaron por suavizar la curva cuidadosamente.

En el apartado (b) resultó sorprendente comprobar cuántos alumnos trataron de resolver la ecuación por medios algebraicos, en vez de recurrir a los medios tecnológicos, y dieron más de 2 respuestas, dejando claro que no habían reconocido el vínculo que existía entre el gráfico y lo que se les estaba preguntando en el apartado (b).

Pregunta 4

Por lo general, la mayoría de los alumnos resolvieron bien esta pregunta. En los subapartados (a)(i) y (b) muchos tuvieron problemas para identificar qué valor tenían que coger para meterlo en la función de distribución de probabilidad acumulada de Poisson. Si un alumno empezó correctamente esta pregunta por lo general acabó consiguiendo la puntuación máxima. Sin embargo, hubo algunos alumnos que no supieron interpretar el subapartado (a)(ii) y que confundieron el valor de la media de la distribución con el valor esperado que les pedían en la pregunta.

Pregunta 5

El apartado (a) fue una de las preguntas que mejor resolvieron los alumnos; de hecho, hubo muchos que lograron la máxima puntuación, aunque también se vieron muchos errores por descuido con los signos a la hora de calcular el producto vectorial, lo que hizo que obtuvieran valores incorrectos para *a*, *b* y *c*. En el apartado (b) hubo muchos alumnos que no dieron la respuesta final en forma cartesiana, tal y como se les pedía. Muchos otros leyeron mal las componentes del vector normal y creyeron que eran $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, en lugar de $\begin{pmatrix} 4 \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Pregunta 6

En el apartado (a) hubo muy pocos alumnos que obtuvieran la máxima puntuación, ya que no se dieron cuenta de que había que utilizar las propiedades de los logaritmos para reescribir la función dada como una suma. Un gran número de alumnos optaron por un enfoque gráfico, pero en la mayoría de los casos esto condujo a valores incorrectos de a y b; de hecho, solo algunos alumnos fueron capaces de deducir correctamente el valor de *a* utilizando este enfoque. En el apartado (b) la mayoría de los alumnos recibieron la máxima puntuación. No obstante, resultó sorprendente comprobar cuántos de ellos trataron de integrar sin recurrir a medios tecnológicos y cuántos utilizaron también una fórmula incorrecta para hallar el volumen del sólido de revolución, teniendo en cuenta que está en el cuadernillo de fórmulas.

Pregunta 7

Esta pregunta la hicieron sorprendentemente mal. Hubo muy pocos alumnos que completaran con éxito las tres operaciones que tenían que realizar con las filas sin cometer ningún error aritmético. Incluso entre aquellos que completaron correctamente la reducción por filas, hubo muchos que fueron incapaces de aplicar la forma reducida que habían hallado para determinar correctamente los valores de alfa y beta que les pedían en (i), (ii) y (iii). En la mayoría de los casos solo fueron capaces de encontrar las condiciones necesarias para que el sistema no tuviera solución y, en ocasiones, aquellas para que hubiera infinitas soluciones, pero casi ninguno dio con las condiciones requeridas para que el sistema tuviera una única solución. Muchos alumnos sabían cómo había que abordar el problema, pero fueron luego incapaces de interpretar los resultados obtenidos.

Fue interesante comprobar que en los exámenes en español la mayoría de los alumnos trataron de resolver este problema utilizando matrices y determinantes. Con frecuencia se observó que este método parecía llevarles más tiempo a los alumnos y, además, a menudo llevó aparejado errores de cálculo.

El apartado (b) también resultó bastante decepcionante, puesto que los alumnos no fueron capaces de dar la ecuación de la recta en forma cartesiana y, por lo general, se limitaron a dar su forma paramétrica. Solo hubo unos pocos alumnos capaces de obtener la ecuación correcta de la recta —o, al menos, una basada en la forma reducida del apartado (a)—. Nuevamente hubo muchos que no dieron la respuesta en la forma que se pedía en el enunciado.

También hubo un número significativo de alumnos que ni siquiera intentaron ninguno de los dos apartados de esta pregunta.

Pregunta 8

Esta fue una de las preguntas del examen que más problemas planteó a los alumnos. En el apartado (a) hubo muy pocos alumnos que consiguieran la máxima puntuación. Hubo muchos que no fueron capaces de imaginarse adecuadamente la situación, como demuestran los diagramas que dibujaron. Ser capaces de dibujar un diagrama apropiado resultó ser una de las claves del éxito. A los alumnos les habría venido bien reflexionar detenidamente sobre las dimensiones indicadas. ¡5 m es una medida de longitud mayor que 4 m! De entre aquellos que sí que supieron cómo abordar el problema, hubo algunos que no fueron merecedores del punto final porque no dieron la respuesta redondeando al número entero más cercano.

Algunos alumnos resolvieron el apartado (b) algo mejor, al ser capaces de ayudarse de la ecuación dada para proseguir. Sin embargo, hubo alumnos que ni siquiera intentaron responder este apartado de la pregunta.

El apartado (c) requería competencia en el manejo de la calculadora, y la mayoría de los alumnos supo calcular el valor correcto. Solo hubo unos pocos alumnos que optaran por enfoques analíticos, en lugar de recurrir a medios tecnológicos para resolver este apartado.

Pregunta 9

En esta pregunta o se concedió la puntuación máxima o se concedieron muy pocos puntos; no hubo término medio. Fue gratificante comprobar que la mayoría de los alumnos trataron de plantear el problema utilizando un diagrama de árbol. Aquellos alumnos que resolvieron con éxito el apartado (a) por lo general también resolvieron correctamente el apartado (b). Algunos alumnos no interpretaron el problema como estaba previsto y, como consecuencia de ello, en su diagrama de árbol escribieron valores incorrectos correspondientes a las distintas probabilidades.

Pregunta 10

La mayoría de los alumnos resolvieron bien el apartado (a). Sin embargo, hubo muchos que no alcanzaron la puntuación máxima en (i) por no dar la respuesta como un valor porcentual. En el subapartado (iii) hubo muchos alumnos que no se dieron cuenta de que era un problema de distribución binomial, aunque muchos otros sí que se percataron. El apartado (b) lo respondieron con menor acierto; por ejemplo, hubo muchos alumnos que no utilizaron la distribución normal estándar para hallar la desviación típica. El subapartado (b)(ii) fue la pregunta que tuvo las peores puntuaciones de toda la prueba, y solo un puñado de alumnos se dieron cuenta de que se trataba de un problema de probabilidad condicionada.

Pregunta 11

En el apartado (a) los resultados fueron excepcionalmente buenos; solo hubo unos pocos alumnos que cometieran errores de manipulación.

En cuanto al apartado (b), los alumnos lo resolvieron razonablemente bien, aunque hubo muchos que hallaron la ecuación de la recta tangente en vez de la de la recta normal.

Para el apartado (c) había que reflexionar un poco. La tasa de respuestas acertadas fue más baja ya que solo algunos alumnos se dieron cuenta que era necesario resolver un sistema de ecuaciones para hallar los puntos y, a partir de ahí, la distancia que les pedían calcular.

Pregunta 12

Un número de alumnos sorprendentemente alto no repararon en que el punto de partida no era el origen. Este hecho hizo que tuvieran problemas en el apartado (a) y, especialmente, en el apartado (d). Muchos de los alumnos obviaron la importancia de la continuidad de las funciones y los dominios con los que tenían que trabajar, lo que conllevó que los resultados en el apartado (c) tampoco fueran demasiado buenos. Por lo general, la parte de representación gráfica la hicieron bastante bien, aunque algunos alumnos ignoraron las instrucciones que especificaban los elementos que tenían que rotular y otros no mostraron el dominio restringido.

Un número razonable de alumnos resolvieron acertadamente el apartado (c), pero también hubo muchos que no se dieron cuenta de que necesitaban el [punto] mínimo para poder crear un sistema de ecuaciones. Muchos alumnos no supieron generar dos ecuaciones para su posterior resolución. La mayoría de los alumnos no resolvieron correctamente el apartado (d) ya que hallaron los instantes en los que la partícula pasaba por el origen, no por el punto de partida.

Pregunta 13

En el apartado (a) la mayoría de los alumnos demostraron tener una buena comprensión de cómo mostrar que las rectas que no se cortan son rectas alabeadas, pero muchos alumnos olvidaron mencionar que las rectas no eran paralelas.

El apartado (b) lo resolvieron excepcionalmente bien; la mayoría de los alumnos obtuvieron la máxima puntuación y solo unos pocos cometieron errores aritméticos.

La mayoría de los alumnos hicieron bien el subapartado (c)(i), pero luego hubo muy pocos alumnos que resolvieran acertadamente (c)(ii), ya que la mayoría de ellos no supieron cómo abordar el problema. De hecho, hubo muchos alumnos que ni siquiera intentaron responder este apartado; les superó completamente llegados a este punto de la prueba. Hubo muchos casos en los que el apartado se dejó en blanco, y también se vieron algunas páginas llenas de enfoques infructuosos y sin mucho fundamento. Solo hubo un número muy reducido de alumnos que lograron más de uno o dos puntos en este apartado de la pregunta, y fue muy raro toparse con casos donde la respuesta final fuera la correcta.

A modo de resumen podemos decir que se vieron muchas respuestas acertadas para los diez primeros puntos en juego, pero que los ocho últimos fueron claramente difíciles de obtener. De ahí que solo los mejores fueron capaces de responder bien esta pregunta.

Prueba 3 del Nivel Superior: Matemáticas discretas

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 8	9 - 16	17 - 27	28 - 34	35 - 41	42 - 48	49 - 60

Comentarios generales

Un número considerable de alumnos parecieron estar bien preparados para esta prueba y, por lo general, les resultó bastante asequible. Muchos alumnos demostraron conocer bien los contenidos y, con frecuencia, hicieron gala de unas sólidas habilidades de razonamiento. Naturalmente, hubo un buen número de alumnos para los que el último apartado de cada una de las cinco preguntas supuso todo un desafío, lo que sugiere el nivel jerárquico de dificultad que se estableció dentro de cada pregunta era el adecuado.

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Elaboración de una demostración y habilidades de argumentación.

Darse cuenta de por qué, para un grafo ponderado determinado, el clásico problema del "viajante" no tiene solución.

Recordar con exactitud las definiciones relacionadas con el problema del "viajante", el teorema fundamental de la aritmética y el lema del apretón de manos.

Comprender las propiedades de los grafos planarios, conexos y simples y conocer las desigualdades importantes que relacionan el número de aristas, de vértices y de caras en dichos grafos.

Aplicar las reglas de la aritmética modular para llegar a un resultado matemático.

Utilizar el teorema fundamental de la aritmética para determinar el mcm y el mcd de un par de números.

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Construir un grafo ponderado a partir de una tabla de adyacencia.

Aplicar el algoritmo de Kruskal para hallar el árbol generador minimal de un grafo ponderado.

Hallar, para un grafo ponderado dado, una solución al problema del "cartero chino".

Resolver relaciones de recurrencia homogéneas y lineales de primer grado y de segundo grado con coeficientes constantes.

Dibujar $K_{2,2}$ en forma planaria, dibujar un árbol generador para $K_{2,2}$ y dibujar el complementario de $K_{2,2}$.

Dibujar un grafo planario, conexo y simple.

Aplicar a grafos planarios la relación de Euler y los corolarios asociados.

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1

Por lo general, los alumnos supieron resolver muy bien el apartado (a). La mayoría de los alumnos fueron capaces de dibujar correctamente el grafo H y de aplicar el algoritmo de Kruskal para determinar el árbol generador minimal correspondiente a H. Hubo unos pocos alumnos que utilizaron el algoritmo de Prim (que ya no forma parte del programa de estudios).

La mayoría de los alumnos comprendieron el problema del "cartero chino" planteado en el apartado (b) y supieron añadir el peso de PQ al peso total de H. Sin embargo, algunos alumnos no especificaron una solución al problema del "cartero chino", mientras que otros alumnos pasaron por alto el hecho de que había que volver al vértice inicial.

En el apartado (c) hubo muchos alumnos que tuvieron dificultades para plantear de manera sucinta el problema del "viajante". La mayoría de los alumnos utilizaron argumentos sobre "aristas", en vez de indicar simplemente que el problema del "viajante" no se podía resolver porque para llegar hasta el vértice P obligatoriamente había que pasar dos veces por el vértice Q.

Pregunta 2

Por lo general, los alumnos resolvieron bien el apartado (a); de hecho, hubo un gran número de alumnos que dibujaron una representación planaria correcta de $K_{2,2}$. Sin embargo, algunos alumnos elaboraron una representación correcta pero no planaria de $K_{2,2}$. Los apartados (b) y (c) por lo general los resolvieron bien; hubo muchos alumnos que dibujaron un árbol generador de $K_{2,2}$ correcto y que también dibujaron correctamente el complementario de $K_{2,2}$.

El apartado (d) puso a prueba la capacidad de los alumnos para elaborar un argumento razonado que explicara claramente por qué el complementario de $K_{m,n}$ no posee un árbol generador. Este fue un apartado de la pregunta en el que solo los alumnos más brillantes aportaron el rigor necesario a la hora de dar su explicación.

Pregunta 3

En el apartado (a), un buen número de alumnos fueron capaces de "vislumbrar" la forma de la solución correspondiente a u_n y, a continuación (con frecuencia de manera poco ortodoxa), lograron llegar hasta la solución correcta: $u_n = 4\times 7^n + 1$. Aquí se vio una variedad de métodos y de enfoques interesantes, incluyendo el empleo de la solución general de forma cerrada, la iteración, la sustitución de $u_n = 4\times 7^n + 1$, la sustitución de $u_n = An + B$ y, curiosamente, la conversión a una relación de recurrencia lineal de segundo grado. Algunos alumnos convirtieron erróneamente la relación de recurrencia en una ecuación auxiliar de segundo grado (cuadrática) y obtuvieron $u_n = c_1(6)^n + c_2(1)^n$.

Si la comparamos con preguntas parecidas sobre relaciones de recurrencia incluidas en pruebas de examen recientes, los alumnos respondieron razonablemente bien el apartado (b) u hubo un número considerable de ellos que dieron con la respuesta correcta: $v_n = 4(11)^n$. Fue agradable comprobar cuántos alumnos habían sabido plantear la ecuación auxiliar correcta y utilizar los dos términos dados para obtener la solución que se les pedía. Dio la sensación de que los alumnos estaban mejor preparados para resolver relaciones de recurrencia lineales de segundo orden que para abordar las relaciones de recurrencia lineales de primer orden.

Por otro lado, a la mayoría de los alumnos el apartado (c) les resultó difícil. Solo hubo unos pocos alumnos que trataron de descomponer $11^n - 7^n$ en factores o que intentaron restar 7^n del desarrollo de $(7+4)^n$. También fue sorprendente comprobar que pocos alumnos habían optado por indicar que 11 y 7 son congruentes módulo 4, con lo que $11^n - 7^n \equiv 0 \pmod 4$ y, a partir de lo anterior, se puede deducir que es múltiplo de 4.

Pregunta 4

En el subapartado (a)(i) muchos alumnos trataron de demostrar $2e \geq 3f$ mediante ejemplos numéricos. Sin embargo, solo unos pocos alumnos fueron capaces de demostrar correctamente esta desigualdad. En cuanto al subapartado (a)(ii), la mayoría de los alumnos sabían que K_5 tiene 10 aristas. Sin embargo, hubo algunos que se limitaron a dibujar un diagrama con un número de caras cualquiera y que utilizaron esta representación particular como base para su "demostración". Además, hubo muchos alumnos que no se dieron cuenta del requisito "a partir de lo anterior" que incluía el enunciado del subapartado (a)(ii).

En cuanto al subapartado (b)(i), muchos alumnos indicaron incorrectamente el "lema del apretón de manos" al relacionarlo con el "problema del apretón de manos". En el subapartado (b)(ii) solo unos pocos alumnos supieron determinar que $v = e$ y, a partir de ahí, obtener que $f = 2$.

En el apartado (c) hubo un número razonable de alumnos que fueron capaces de dibujar un grafo planario conexo y simple de 6 vértices, cada uno de grado 3. Aquí el error más habitual fue elaborar un grafo que contuviera una o más aristas múltiples.

Pregunta 5

En el apartado (a), la mayoría de los alumnos omitieron el "excepcionalmente" en su definición del teorema fundamental de la aritmética. Hubo unos pocos alumnos que definieron lo que es un número primo.

En el apartado (b) hubo un número considerable de alumnos que utilizaron el algoritmo de Euclides, en vez del teorema fundamental de la aritmética, para calcular el máximo común divisor [$\gcd(5577, 99099)$] y el mínimo común múltiplo [$\operatorname{lcm}(5577, 99099)$].

El apartado (c), donde se les pedía una demostración estándar que ya había aparecido en pruebas anteriores, lo resolvieron acertadamente aquellos alumnos que estaban bien preparados.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

Es importante que se enseñe todo el programa de estudios y que los alumnos tengan presente las diversas definiciones que se incluyen en el programa de estudios.

Es necesario que los profesores sigan recalcando la importancia de las demostraciones y que discutan en clase qué constituye un razonamiento y una argumentación lógica que sean sólidos y con fundamento. Es importante que los alumnos trabajen para mejorar la precisión de sus explicaciones en aquellas preguntas que requieren una demostración y un razonamiento. Analizar la estructura de las demostraciones incluidas en los esquemas de calificación de exámenes anteriores debería servir de ayuda para dominar estos importantes atributos de la comunicación matemática, puesto que las divagaciones casi nunca sirven para conseguir muchos puntos. También es importante que el comienzo de una demostración no empiece con aquello que se está tratando de demostrar y que se tenga en cuenta que el empleo de ejemplos numéricos no constituye una demostración.

Los profesores tienen que seguir haciendo hincapié en aquellos enunciados en los que se pide expresamente que el alumno utilice un método concreto o un resultado específico. Por ejemplo, en la pregunta 5 (b), a los alumnos se les pedía que utilizaran el teorema fundamental de la aritmética con los números 5577 y 99099 y que, posteriormente, utilizaran el resultado (la descomposición en factores) para determinar el mcm y el mcd de estos números. Es importante advertir a los alumnos de que pueden perder puntos si no leen con el suficiente detenimiento lo que dice realmente el enunciado de la pregunta y que han de asegurarse de resaltar las pistas o los datos que están presentes en el enunciado de la pregunta.

A pesar de que esta opción incluye gráficos y árboles, no es necesario que los alumnos utilicen papel milimetrado para mostrar algunas de las respuestas. Dado que los cuestionarios de examen se escanean, puede resultar complicado leer las respuestas de los alumnos si se han escrito en papel milimetrado.

Prueba 3 del Nivel Superior: Análisis

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 9	10 - 18	19 - 24	25 - 31	32 - 38	39 - 45	46 - 60

Comentarios generales

Parece que esta prueba les resultó asequible a la inmensa mayoría de los alumnos. Se notó que el programa de estudios se había cubierto correctamente y que a los alumnos les habían preparado bien en sus colegios. Como siempre sucede con las pruebas de análisis, en ocasiones se observó una cierta falta de rigor y de vez en cuando los alumnos se vieron inmersos en argumentos circulares.

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

El criterio de comparación o el criterio de comparación en el límite plantearon ciertas dificultades, como también las planteó el teorema del valor medio.

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Los alumnos estaban bien preparados para abordar los siguientes temas: la regla de L'Hôpital, el teorema de Maclaurin, el criterio de D'Alembert, el criterio de la integral de Cauchy y la convergencia de integrales indefinidas.

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1

La mayoría de los alumnos entendieron bien las técnicas que había que utilizar en esta pregunta. No obstante, a un número sorprendente de alumnos se les olvidó mostrar que f(0)=0. Hubo algunos alumnos que no simplificaron la segunda derivada, lo que conllevó un trabajo adicional e hizo que aumentara la probabilidad de que cometieran errores.

Pregunta 2

Este apartado (a) se podía responder empleando diversos enfoques. El más habitual fue utilizar el factor de integración (a pesar de que este método lo único que hacía era llevarte en círculo). Hubo algunos alumnos que sustituyeron la solución dada en la ecuación diferencial y otros que multiplicaron la solución por *x* y, a continuación, utilizaron la regla del producto para obtener la ecuación diferencial. Todos estos métodos se consideraron aceptables.

El apartado (b) resultó ser una pregunta sencilla de resolver. Hubo algunos alumnos que no utilizaron la pista del "a partir de lo anterior" y, como consecuencia de ello, trabajaron desde el principio utilizando el factor de integración. Un número sorprendente de alumnos cometieron errores algebraicos básicos, como poner el término $+c$ en el lugar equivocado, lo que hizo que no lo dividieran entre x.

Pregunta 3

En el apartado (a) no se mencionaba qué criterio o prueba había que utilizar para demostrar lo que se pedía. Esto hizo que algunos alumnos trataran de utilizar métodos que no resultaban adecuados. Al utilizar el criterio de D'Alembert o el criterio de la integral de Cauchy, muchos alumnos escribieron el enunciado incorrecto "$\frac{1}{n^2}$ converge" (serie *p*), en vez del correcto con $\sum$. Esto quizá podría sugerir una falta de comprensión de los conceptos subyacentes.

En el apartado (b) hubo muchas respuestas buenas y bien argumentadas. La mayoría de los alumnos se dieron cuenta de la importancia que tenía el resultado del subapartado (i) para poder hallar el límite en el subapartado (ii). Por lo general, un resultado estándar como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=1$ se puede citar, simplemente, pero en el caso de otros límites como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)=1$ es necesario justificar detenidamente el resultado.

En el subapartado (c)(i) los alumnos tienen que tener presente cuáles son las condiciones necesarias para poder aplicar los distintos criterios o pruebas de las series.

En el subapartado (c)(ii) los alumnos resolvieron bien la integral. Además, la mayoría relacionaron correctamente el hecho de que la integral era indefinida y el hecho de que la serie divergía. En esta pregunta no era necesario tomar inicialmente un límite superior finito, y fue aceptable utilizar el ∞. Esto se debió a que el término de instrucción era "determinar". En el apartado (b) sí que se necesitaba un límite superior finito, porque ahí el término de instrucción era "mostrar". Para garantizar que siempre se conceda la máxima puntuación es preferible que los alumnos pequen de exceso de cautela y que utilicen siempre la notación de límites cuando estén trabajando con integrales indefinidas.

Pregunta 4

La mayoría de los alumnos resolvieron correctamente el apartado (a) de esta pregunta.

En el apartado (b) se cometieron unos pocos errores con los signos, pero los alumnos, en su mayoría, completaron con éxito la integración por partes. En esta pregunta era importante utilizar la notación de límites para mostrar que la integral convergía a 2.

Pregunta 5

La mayoría de los alumnos resolvieron bien el subapartado (a)(i).

En cuanto al subapartado (a)(ii), por lo general los alumnos lo hicieron mal; p. ej., hubo muchos que no dibujaron la curva correctamente porque no se dieron cuenta de la importancia del dominio dado. Otro error habitual fue dibujar el gráfico de la derivada en vez de dibujar el de la función.

En el subapartado (b)(i) los resultados fueron muy malos. En muchos casos el alumno expuso justo lo que tenía que demostrar; por ejemplo, "dado que la derivada es igual a 0, la línea es plana". La mayoría de los alumnos no se dieron cuenta de la importancia de hacer una prueba con un punto perteneciente al intervalo, por lo que en las soluciones que se vieron con mayor frecuencia se aplicó el teorema del valor medio a los extremos del intervalo. Además se produjo cierta confusión entre el teorema del valor medio y el teorema de Rolle.

En el subapartado (b)(ii) fue agradable comprobar cuántos alumnos se habían dado cuenta de la relación que existía con el apartado anterior de la pregunta. A partir de ahí, el error que cometieron con más frecuencia fue el de derivar incorrectamente. Los alumnos deberían haber sido conscientes de que siendo una pregunta de tipo "demostrar" no bastaba con limitarse a indicar, por ejemplo, $f(0)=\pi$.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

Los alumnos tienen que estar expuestos a un abanico más amplio de usos del teorema del valor medio.

Los alumnos deberían practicar más cómo averiguar cuál es la técnica correcta que hay que aplicar en una pregunta sobre convergencia de series.

El término "a partir de lo anterior" se añade fundamentalmente para alertar a los alumnos sobre la necesidad de utilizar el resultado de un (sub)apartado anterior.

Prueba 3 del Nivel Superior: Conjuntos, relaciones y grupos

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 6	7 - 13	14 - 20	21 - 25	26 - 31	32 - 36	37 - 60

Comentarios generales

Las matemáticas incluidas en la opción Conjuntos, relaciones y grupos difieren bastante de las que contienen las otras tres opciones ya que gira en torno a conceptos muy abstractos, en lugar de estar basada en la aplicación de reglas mecánicas. Por ese motivo, la demostración y un razonamiento lógico estricto desempeñan en esta opción un papel muy importante.

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Trabajar con la aritmética de los enteros "módulo x".

Muchos alumnos confundieron el uso de sinónimos matemáticos, como si eso constituyera una demostración en toda regla. Por ejemplo, limitarse a decir que una función es "uno-a-uno" no equivale a elaborar una demostración de que la función es inyectiva.

Hubo muchos alumnos que no estaban cómodos trabajando con grupos infinitos y con conjuntos discretos infinitos.

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

La definición de grupo y los conceptos asociados: tablas de Cayley; simétricos; el orden de un elemento; permutaciones.

La definición de relación de equivalencia.

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1

Apartado (a): la mayoría de los alumnos fueron capaces de completar correctamente la tabla de Cayley. Lamentablemente, también hubo muchos que malgastaron tiempo y espacio calculando trabajosamente las celdas que faltaban en la tabla, sin reparar en que el elemento neutro es p y que los elementos q, r y s son claramente de orden dos, por lo que hay 14 celdas que se podían rellenar sin necesidad de hacer ningún cálculo. Unos pocos alumnos pensaron que t y u eran de orden dos.

Apartado (b): Por lo general lo hicieron bien. Hubo unos pocos alumnos que no conocían la definición de orden de un elemento.

Apartado (c): con frecuencia lo resolvieron acertadamente. Hubo unos pocos alumnos que indicaron subgrupos adicionales que, por consiguiente, eran incorrectos.

Pregunta 2

Observamos que había muchos alumnos que no estaban lo suficientemente familiarizados con la aritmética modular como para completar esta pregunta satisfactoriamente. En particular, hubo algunos alumnos que ignoraron completamente el requisito de que las soluciones había que hallarlas módulo 7 y dieron respuestas decimales en los apartados (a) y (b). En el subapartado (b)(ii) hubo muy pocos alumnos que se apoyaran en el teorema de Lagrange. Algunos alumnos creían erróneamente que un grupo tiene que ser abeliano e hicieron la prueba de la conmutatividad en el subapartado (b)(ii). Fue agradable comprobar que muchos alumnos se habían dado cuenta de que un elemento neutro lo ha de ser por la izquierda y también por la derecha.

Pregunta 3

Apartado (a): un número sorprendente de alumnos pensaron que con dar un ejemplo bastaba como prueba para responder a este apartado.

Apartado (b): nuevamente, una falta de seguridad a la hora de utilizar la aritmética modular hizo que los intentos de muchos alumnos en este apartado resultaran poco fructíferos.

Apartados (c) y (d): muchos alumnos respondieron estos apartados, pero algunos hallaron soluciones en forma de fracción, en lugar de números enteros u omitieron el cero o los enteros negativos.

Apartado (e): algunos alumnos supusieron que R era una operación (en vez de una relación), con lo que dieron respuestas en la forma $aRb \neq bRa$.

Pregunta 4

Apartado (a): aquellos alumnos que formularon las preguntas basándose en las definiciones básicas de función inyectiva y función sobreyectiva por lo general resolvieron con éxito este apartado. Por lo demás, intentos verbales tales como " f es una función “de uno a uno” $\Rightarrow f$ f es inyectiva" o " g es sobreyectiva porque su recorrido es igual a su codominio" no recibieron ningún punto. Algunos alumnos supusieron erróneamente que f y g eran una la inversa de la otra (y viceversa).

Apartado (b): hubo pocos alumnos que dieran respuestas totalmente satisfactorias. Algunos escribieron funciones que satisfacían la identidad mutua, pero no estaban definidas en los conjuntos dados o dieron ejemplos donde g sí que era una función biyectiva.

Pregunta 5

Apartado (a): por lo general los alumnos resolvieron bien este apartado. En aquellos casos donde se perdió algún punto normalmente fue porque el alumno no eligió dos elementos distintos en la demostración de que el conjunto es cerrado para esa operación.

Apartado (b): solo unos pocos alumnos se dieron cuenta de que no tenían que demostrar que H es un grupo, porque eso ya se había indicado en el enunciado de la pregunta. Algunos alumnos trataron de apoyarse en el teorema de Lagrange, a pesar del hecho de que G es un grupo infinito.

Apartado (c): muchos alumnos mostraron que la aplicación es inyectiva. La mayoría de los intentos de demostrar que la aplicación era sobreyectiva resultaron poco convincentes. De entre aquellos alumnos que trataron de establecer la propiedad de homomorfismo, hubo algunos que no utilizaron dos elementos distintos.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

En matemáticas es muy importante la noción de "demostración" y el uso de argumentos lógicos dotados de una base sólida, pero esto es especialmente cierto para aquellos alumnos que escogen la opción de Conjuntos, relaciones y grupos. Cuanto antes se exponga a los alumnos a estas formas de pensar, tanto mejor.

Aunque esta opción trata sobre conceptos matemáticos muy abstractos, se pueden enseñar apoyándose en un amplio abanico de ejemplos concretos: conjuntos de números discretos y continuos, aritmética modular y permutaciones o transformaciones de conjuntos, incluidas las simetrías de figuras planas.

Hay que animar a los alumnos a que trabajen apoyándose en expresiones matemáticas, en vez de basarse en explicaciones verbales. Con demasiada frecuencia este tipo de desarrollos (los basados en argumentos verbales) parecen ser tautológicos o carecen de sentido.

Prueba 3 del Nivel Superior: Estadística y probabilidad

Límites de calificación del componente

Calificación final:	1	2	3	4	5	6	7
Rango de puntuaciones:	0 - 8	9 - 16	17 - 25	26 - 31	32 - 37	38 - 43	44 - 60

Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Este examen demostró que la mayoría de los alumnos no saben interpretar correctamente los intervalos de confianza. Es importante que los alumnos no solo sean capaces de calcular los intervalos de confianza, sino que también han de saber explicar el significado de los resultados obtenidos.

Muchos alumnos parecían no ser conscientes de que podían utilizar la calculadora para los procedimientos de estadística inferencial. Fue bastante habitual ver casos en los que el alumno utilizaba la fórmula apropiada para calcular los estadísticos de una prueba dada en lugar de leer directamente el valor de la calculadora.

Hubo muchos alumnos que fueron incapaces de definir correctamente los estimadores, aunque quizás esto se deba a una incapacidad para escribir explicaciones verbales, y no a una falta de comprensión.

A algunos alumnos las funciones generatrices de probabilidad les causaron problemas.

Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

La mayoría de los alumnos son capaces de realizar pruebas estadísticas, a pesar de que los métodos utilizados son con frecuencia ineficaces.

Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1

La mayoría de los alumnos resolvieron correctamente el apartado (a). Sin embargo, en los apartados (b) y (c) cometieron el típico error de confundir $\sum_{i=1}^{n} X_i$ y nX. De hecho, hubo algunos alumnos que incluso utilizaron la segunda expresión, cuando querían decir la primera. Este error les condujo a un valor incorrecto de la varianza y, por supuesto, a una respuesta final incorrecta. Algunos alumnos tuvieron problemas para convertir los enunciados verbales en expresiones matemáticas de probabilidad correctas, especialmente en el caso de (c).

Pregunta 2

Casi todos los alumnos dieron con la estimación correcta de la media, pero algunos cogieron la varianza equivocada de su calculadora a la hora de calcular σ^2. En el subapartado (b)(i), en ocasiones el alumno escribió mal las hipótesis, generalmente porque utilizó un símbolo incorrecto en vez de usar μ (por ejemplo, se vieron respuestas tales como d, $\overline{x}$ y "media"). En el subapartado (b)(ii) hubo muchos alumnos que no aprovecharon la calculadora de un modo eficiente. La intención de la pregunta era que los alumnos simplemente introdujeran los datos en la calculadora y utilizaran el software para obtener el valor del parámetro p. En su lugar, hubo muchos alumnos que para hallar el valor del parámetro p calcularon primero t empleando la fórmula adecuada. Este enfoque les llevó mucho tiempo y, además, se arriesgaban a cometer errores. En el subapartado (b)(iii) se esperaba que los alumnos hicieran referencia a la afirmación del enunciado, con lo que no se aceptaron respuestas del tipo "acepto H_0" o "rechazo H_1".

Pregunta 3

La intención del apartado (a) era que los alumnos simplemente introdujeran los datos en la calculadora y utilizaran el software para obtener el intervalo de confianza. Sin embargo, como sucedió en la pregunta 2, hubo muchos alumnos que calcularon la media y la varianza a mano y que utilizaron las fórmulas adecuadas para determinar los extremos del intervalo de confianza. Aquí nuevamente perdieron un tiempo precioso, además de correr el riesgo de cometer errores. Las respuestas dadas en el apartado (b) fueron sumamente decepcionantes: la inmensa mayoría de los alumnos dieron una interpretación errónea de lo que significa un intervalo de confianza. La respuesta más habitual fue algo así como "Hay un 99 % de probabilidades de que μ esté contenido en el intervalo [9,761;9,825]". Decir esto es incorrecto puesto que tanto el intervalo como μ son constantes; la afirmación de que μ está contenido en el intervalo [9,761;9,825] es o bien totalmente verdadera o bien totalmente falsa; no hay ninguna probabilidad implicada. Otra respuesta habitual fue también "Estoy seguro al 99 % de que μ está contenido en el intervalo [9,761;9,825]". Esta afirmación tampoco resulta satisfactoria, en parte porque "seguro al 99 %" es en realidad un eufemismo para decir "una probabilidad del 99 %", y en parte porque responde a la pregunta "¿Qué es un intervalo de confianza del 99 % para μ?" limitándose a reordenar las palabras de la pregunta pero sin ir realmente a ningún lado. La respuesta esperada era que si el muestreo se realizase muchas veces, en ese caso aproximadamente el 99 % de los intervalos de confianza calculados incluirían a μ. Una respuesta más rigurosa sería que un intervalo de confianza del 99 % para μ es un valor observado de un intervalo aleatorio que contiene a μ con una probabilidad igual a 0,99, del mismo modo que el número $\overline{x}$ es un valor observado de la variable aleatoria $\overline{X}$. El concepto de intervalo de confianza es complicado para estos niveles, pero la realidad es que los intervalos de confianza forman parte del programa y, por lo tanto, también se incluye su interpretación. A la vista de la falta de comprensión generalizada de los intervalos de confianza, en esta ocasión se concedieron algunos puntos a aquellas interpretaciones que incluían el 99 % de probabilidad o de seguridad, pero esto no volverá a suceder en futuros exámenes. Por el contrario, hubo muchos alumnos que resolvieron correctamente el apartado (c), y la mayoría de ellos utilizaron el método 2 que aparece en el esquema de calificación.

Pregunta 4

En general, las soluciones dadas en el apartado (a) fueron sumamente decepcionantes: la inmensa mayoría de los alumnos fueron incapaces de dar una explicación correcta de los estimadores y de los estimadores sin sesgo. En cuanto al apartado (b) las soluciones dadas fueron, en general, razonablemente buenas, lo que quizás podría indicar que las explicaciones tan deficientes del apartado (a) se debieron a una incapacidad para explicar lo que saben, más que a una falta de comprensión.

Pregunta 5

Las soluciones dadas en el apartado (a) fueron, con frecuencia, bastante decepcionantes. Incluso hubo algunos alumnos que se limitaron a escribir la respuesta. Un error habitual fue pasar por alto la posibilidad de que X fuera igual a cero, con lo que los alumnos escribieron a menudo $G(t) = pt$. Las explicaciones dadas en (b) fueron a menudo deficientes, lo que de nuevo indica la incapacidad de los alumnos para ofrecer explicaciones verbales. En el apartado (c) se vieron muy pocas soluciones completas; de hecho, incluso hubo pocos alumnos que llegaran al resultado de que $(q_1 + p_1t)(q_2 + p_2t)$ ha de ser igual a $(q + pt)^2$ para algún valor de p.

Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

Por lo general los alumnos son capaces de calcular intervalos de confianza, pero es importante que sean capaces también de hacer una interpretación correcta del resultado.

Los alumnos tienen que estar más familiarizados con el menú o el software de estadística que tiene su calculadora.

Quizá se debería dedicar más tiempo a las funciones generatrices de probabilidad, pues parece que a algunos alumnos les plantean problemas.