Informes generales de la asignatura de mayo de 2014

# MATEMÁTICAS NS TZ2

## Bandas de calificación de la asignatura

### Matemáticas discretas

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 - 12 | 13 - 26 | 27 - 38 | 39 - 50 | 51 - 62 | 63 - 73 | 74 - 100 |

### Análisis

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 - 13 | 14 - 27 | 28 - 40 | 41 - 52 | 53 - 65 | 66 - 76 | 77 - 100 |

### Conjuntos, relaciones y grupos

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 - 12 | 13 - 25 | 26 - 38 | 39 - 50 | 51 - 62 | 63 - 73 | 74 - 100 |

### Estadística y probabilidad

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 - 12 | 13 - 26 | 27 - 38 | 39 - 50 | 51 - 62 | 63 - 73 | 74 - 100 |

## Variantes de los exámenes según la zona horaria

Para proteger la integridad de los exámenes, cada vez se están utilizando más variantes distintas de los exámenes según la zona horaria donde se realicen. Al recurrir a variantes del mismo examen, los alumnos ubicados en una parte del mundo no estarán respondiendo al mismo cuestionario de examen que los alumnos ubicados en otras partes del mundo. Se aplica un proceso muy riguroso para garantizar que las diversas variantes del examen sean comparables en lo que respecta a su dificultad y a la cobertura del programa de estudios, y se toman las medidas pertinentes para garantizar que se apliquen las mismas normas de calificación a todos los exámenes escritos de los alumnos, independientemente de cuál haya sido la versión del examen a la que hayan respondido. Para la convocatoria de exámenes de mayo de 2014 el IB ha elaborado variantes de los exámenes de Matemáticas NS para las distintas zonas horarias.

## Evaluación interna

### Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 - 2 | 3 - 5 | 6 - 8 | 9 - 11 | 12 - 14 | 15 - 16 | 17 - 20 |

## Ámbito y adecuación del trabajo entregado

La mayoría de las exploraciones estaban acordes con el contenido de la asignatura de Matemáticas NS, pero la calidad de los trabajos presentados fue muy variable; de hecho, hubo muy pocas exploraciones que obtuvieran una calificación de la parte superior del rango. Lamentablemente a muchas exploraciones les faltaban las referencias. Es necesario comunicar claramente este requisito a todos los profesores; si no, los alumnos corren el riesgo de ser acusados de conducta improcedente.
Algunas de las exploraciones eran demasiado largas; en algunos casos esto se debió a que el ámbito de la exploración no había quedado suficientemente definido y delimitado. Por otro lado, hubo unas pocas exploraciones que eran demasiado breves y que incluían muy poco contenido matemático.
Hubo algunos temas repetidos (es decir, elegidos por más de un alumno), como «El problema de Monty Hall», «Las matemáticas del Cubo de Rubic» o «Las matemáticas que esconde el juego de Pokemon». Algunas exploraciones estaban basadas en problemas habituales de los libros de texto, y en ellas el alumno demostró una comprensión nula o escasa de los conceptos matemáticos que se estaban explorando. Sin embargo, hubo unos pocos alumnos que demostraron una comprensión profunda del tema tratado y consiguieron personalizar sus exploraciones. También hubo muchas exploraciones de utilización de modelos matemáticos en las que se trataron problemas de Física. El tema más utilizado en las exploraciones fue la «Trayectoria parabólica» y la «Ecuación de la catenaria».

## Desempeño de los alumnos con relación a cada criterio

**A** – Por lo general los alumnos obtuvieron buenos resultados en este criterio. Da la impresión que algunos profesores creen que es necesario incluir encabezamientos llamados «Objetivo general», «Fundamentos», etc. para poder optar a los niveles de logro más altos. La mayoría de las exploraciones eran completas y concisas, aunque hubo algunas que tenían una longitud exagerada. Aquellos trabajos que estaban basados en problemas típicos de los libros de texto y que dependían de muchas fuentes tendían a ser incoherentes y resultaban más difíciles de seguir. Toda información que esté parafraseada tiene que llevar aparejada una referencia, que hay que insertar en el lugar de la exploración en el que se haya utilizado dicha paráfrasis. Una nota al pie que simplemente remita al lector a la bibliografía no es suficiente y puede conllevar una decisión de conducta improcedente.

**B** – Por lo general los alumnos obtuvieron un buen resultado en este criterio. Con frecuencia incluyeron gráficos y tablas, aunque no añadieron comentarios al respecto. En ocasiones los gráficos no estaban rotulados y a las tablas les faltaban los encabezamientos. El profesor perdonó a veces el uso indebido de la notación de computador; esto supuso un cambio en el nivel de logro concedido. A algunas exploraciones les faltaba la definición de los términos clave utilizados.

**C** – Este es un criterio que casi todos los profesores interpretaron erróneamente: en este sentido, hubo bastantes alumnos que recibieron los niveles de logro más altos por su compromiso o por el entusiasmo que habían mostrado por el tema, sin que nada de esto quedara patente en el trabajo presentado. Aquellos alumnos que presentaron una exploración basada en algún problema habitual de los libros de texto que se salía del currículo de NS no pudieron obtener un nivel de logro elevado en este criterio porque no entendían en profundidad los conceptos matemáticos utilizados y, por lo tanto, no fueron capaces de hacer suyo el tema y ampliar el trabajo más allá de los aspectos teóricos presentados. También hay que decir que algunos profesores entendieron bien los descriptores del criterio y lograron transmitírselos eficazmente a sus alumnos.

**D** – Algunos profesores entendieron mal los descriptores de este criterio, pues parece que les dieron a entender a sus alumnos que la reflexión era un plus que se añadía al trabajo realizado. Como tal, algunas exploraciones se escribieron como si fueran una antigua «Tarea de Evaluación Interna», pues contenían únicamente una narración sobre el ámbito y las limitaciones del trabajo realizado, sin añadir ninguna reflexión crítica y coherente. Nuevamente, a aquellos alumnos que escogieron un problema de investigación «de los libros de texto» les costó hacer una reflexión sobre el proceso seguido y/o sobre los resultados y la relevancia que tienen. Para conseguir un nivel de logro elevado en este criterio los alumnos tienen que plantearse exploraciones más avanzadas, analizar las implicaciones de los resultados obtenidos, comparar los puntos fuertes y débiles de los distintos enfoques matemáticos de su investigación y también examinar el tema desde diferentes perspectivas.

**E** – En las exploraciones presentadas hubo una gran variedad de contenido matemático, que iba desde conceptos matemáticos muy básicos a ampliaciones que se salían con creces del programa de estudios de NS. Algunas exploraciones estaban llenas de fórmulas que parecían estar copiadas de revistas científicas de matemáticas o de la Wikipedia sin que las fuentes apropiadas apareciesen mencionadas en el trabajo. No siempre queda claro si el profesor ha comprobado o no el contenido matemático del trabajo; esto hace que sea difícil saber cómo ha interpretado el profesor los niveles de logro y cómo los ha concedido. En algunas exploraciones el contenido resultaba «forzado» y se habían añadido conceptos abstractos demasiado sofisticados en un intento por aumentar la calidad de la exploración. Con frecuencia esto dio lugar a una amalgama de ecuaciones y fórmulas matemáticas que el alumno no necesariamente había comprendido. A pesar de que una exploración puede adoptar el formato de un artículo de investigación y contener conceptos matemáticos extraídos de las fuentes apropiadas, el alumno tienen que demostrar que comprende en profundidad los conceptos matemáticos que se están explorando.

## Replace with Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

La exploración se debería mencionar cuanto antes en la asignatura y hay que referirse a ella con la suficiente frecuencia como para los alumnos tengan tiempo de reflexionar sobre qué área de las matemáticas es la que mejor se adapta a sus intereses y la que les va a permitir desarrollar una exploración adecuada.

A los alumnos se les debe facilitar material que les sirva de estímulo para encontrar ideas para la exploración. Este material puede incluir películas, vídeos breves, fotografías, experimentos, etc.

Los alumnos tienen que desarrollar habilidades de expresión escrita y de investigación a través de la lectura y comprensión de distintas formas de escritura matemática, así como de la posible asignación de minitareas.

Los profesores deben discutir con el alumno si el tema elegido resulta o no adecuado antes de que el alumno presente un primer borrador (es decir, una versión preliminar) del trabajo.

Los alumnos deberían utilizar parte del tiempo asignado a la Exploración para explicar claramente cuáles son sus expectativas (es decir; qué esperan lograr con la exploración) a la hora de utilizar ideas que hayan tomado prestadas de fuentes externas. Los profesores tienen que dejar muy claro a los alumnos que todas las citas textuales y las ideas parafraseadas, tomadas prestadas o robadas se han de indicar en el trabajo incluyendo una referencia allí donde se mencionan; si no, el trabajo del alumno se enviará al departamento de Probidad Académica, donde quizás decidan que se trata de un caso de conducta improcedente (plagio).

El profesor debería asegurarse de que el trabajo que se va a enviar lo haya elaborado el propio alumno.

El profesor tiene que mostrar pruebas de haber verificado las matemáticas, mediante marcas de verificación (tics), anotaciones y comentarios escritos directamente en el trabajo del alumno. Todo esto le servirá de ayuda al moderador para ratificar el nivel de logro que ha concedido el profesor.

El profesor debe puntuar el primer borrador de la exploración. De este modo los alumnos tendrán unos comentarios orientativos por escrito sobre la calidad de la versión preliminar del trabajo. Esto también debería dar lugar a una discusión que garantice que el alumno comprende los conceptos matemáticos utilizados y que este conocimiento y comprensión quedan patentes en el trabajo.

A los alumnos hay que desaconsejarles que utilicen conceptos matemáticos complicados que se escapen del ámbito del programa de estudios de NS si esto no conduce a un cierto grado de creatividad o a una personalización del problema.

Hay que recordarles a los alumnos que la exploración tiene que tener entre 6 y 12 páginas escritas a ordenador en un tamaño de fuente apropiado (p. ej., Arial 12). Los diagramas y/o las tablas que no resulten significativos y que no aporten algo sustancial al desarrollo de la exploración no se deben incluir.

Los alumnos tienen que entender la diferencia que hay entre describir los resultados y reflexionar de manera crítica sobre sus resultados.

El utilizar conceptos matemáticos complicados que se salgan con creces del programa de estudios de NS a menudo se traduce en una falta de comprensión profunda de dichos conceptos lo que, a su vez, hace que al alumno le resulte complicado demostrar Compromiso Personal o Reflexión.

A los alumnos se les debería animar a plantear sus propias preguntas basadas en sus propios intereses individuales: aquí se pueden incluir problemas cercanos y de actualidad de carácter social, económico o medioambiental.

A los profesores se les recomienda que utilicen exploraciones pasadas (ejemplos incluidos en el material de ayuda al profesor) y que involucren a los alumnos en el proceso de calificación de dichas exploraciones. Esto se ha de hacer en las fases tempranas de la elaboración de la exploración. Esto servirá para aclarar y recalcar la importancia de cada criterio y para poner de relieve cómo puede llegar a afectar la elección del tema sobre los niveles de logro que se pueden conseguir.

## Comentarios adicionales

Hubo unas cuantas exploraciones que reflejaban muy poco trabajo propio, más allá de ir parafraseando entradas de la Wikipedia. Es responsabilidad de los colegios el comprobar si existe o no plagio antes de que el trabajo del alumno se envíe para ser evaluado.
Cuando un alumno decide presentar una exploración que está basada en un fenómeno científico tiene que tener en cuenta que está escribiendo un trabajo sobre matemáticas, no está reproduciendo un informe del laboratorio.
La sensación que da es que el nuevo formato de la Evaluación Interna les ha dado a los alumnos la estupenda oportunidad de explorar un tema de matemáticas que les gusta realmente y de hacer suyo el trabajo matemático presentado.

# Prueba uno

### Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 - 14 | 15 - 29 | 30 - 41 | 42 - 55 | 56 - 70 | 71 - 84 | 85 - 120 |

## The areas of the programme and examination which appeared difficult for the candidates

Sumas y raíces de las ecuaciones cuadráticas; aplicaciones de los vectores a la geometría; incluyendo notación y transformaciones.

## Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Probabilidad; ecuaciones vectoriales de rectas y planos; derivación; puntos estacionarios y puntos de inflexión; integración y sus aplicaciones.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas concretas

**Pregunta 1**

Esta pregunta parece que les resultó muy sencilla a la mayoría de los alumnos. Un pequeño número de alumnos perdieron el punto final, para el que había que aportar una «razón» numérica, aunque también hubo muchos otros que dieron una solución totalmente correcta.

**Pregunta 2**

Esta pregunta permitía varios enfoques. Hubo muchísimos alumnos que obtuvieron algún punto por los pasos iniciales dados, incluso aunque luego no lograran llegar hasta la respuesta final. Pequeños despistes de signo con frecuencia hicieron que los alumnos obtuvieran una respuesta incorrecta, aunque también hay que señalar que la mayoría de ellos o bien llegaron hasta la respuesta final correcta o se «pararon» a medio camino del desarrollo. En este sentido, hubo pocos casos de desarrollos incorrectos.

**Pregunta 3**

Muchos de los alumnos que lograron resolver correctamente esta pregunta emplearon el método de reducción por filas a la matriz ampliada y obtuvieron así una fila de ceros, la cual implica (y los alumnos lo identificaron correctamente) que existen infinitas soluciones.

Algunos demostraron que el determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 14 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ era igual a cero, pero luego les faltó hallar algún punto válido adicional, por lo que solo lograron un punto de los dos posibles. Un reducido número de alumnos fue capaz de aplicar correctamente la regla de Cramer. Hubo bastantes alumnos que resolvieron correctamente el apartado (b), y fue grato comprobar que se habían cometido pocos errores algebraicos fruto del despiste.

**Pregunta 4**

Parece que hubo problemas con esta pregunta, puesto que muchísimos de los alumnos obtuvieron o bien cero puntos o bien la máxima puntuación. Este es un tema nuevo en el programa de estudios, y es posible que algunos colegios no hayan enseñado la suma y el producto de raíces. Para aquellos que estaban familiarizados con el tema esta pregunta resultó sencilla de resolver. Sería útil alentar a los alumnos a que expliquen de dónde han salido las respuestas finales, puesto que con frecuencia se vio en el apartado (b) dar un «5» por respuesta sin apenas cálculos/razonamientos que lo sustentaran.

**Pregunta 5**

Esta pregunta temprana siguió demostrando ser un buen discriminador. En el apartado (a) hubo una gran variedad de esbozos (gráficos aproximados) incorrectos, aunque también hubo algunos intentos realizados con mucho mimo y que fueron correctos. En algunos casos el vértice quedaba poco claro, pero en preguntas de este tipo es importante que el alumno considere al vértice como una de las características importantes de la curva. Muchos de los que obtuvieron la máxima puntuación en (a) lograron también la misma puntuación en (b) sin grandes dificultades.

**Pregunta 6**

En este tipo de preguntas a los alumnos les sigue costando utilizar la notación vectorial correcta. A pesar de que el apartado (a) lo resolvieron correctamente, por lo general, los alumnos perdieron puntos en (b) por no distinguir entre un vector y su módulo, lo que obligó a los examinadores a adivinar a qué se estaban refiriendo. Limitarse a escribir $a = b$ en muchos casos conllevó la pérdida de los dos puntos finales del apartado (b), puesto que el quid de la prueba era darse cuenta de que $|a| = |b|$ y dejarlo plasmado en el ejercicio.

**Pregunta 7**

Las habilidades de los alumnos para la manipulación de números complejos quedaron a menudo patentes, pues muchos de ellos respondieron correctamente al apartado (a). Un reducido número de alumnos fueron capaces de llegar hasta $\frac{10}{w} = \frac{5-5i}{13}$, pero luego no supieron seguir. De vez en cuando se vio algún error de signo fruto del despiste (quizá resulta inevitable que eso ocurra) que llevó a dar $13-13i$ como respuesta final en el apartado (a), aunque en el (b) se pudieron conceder puntos por arrastre de error. Nuevamente el apartado (b) planteó pocos problemas, en particular a aquellos alumnos que habían resuelto correctamente el apartado (a).

**Pregunta 8**

El darse cuenta de que $f(x) = -3$ en la frontera $2$ les permitió a la mayoría de los alumnos obtener los primeros dos puntos.
En el apartado (b), un número importante de alumnos interpretó la reflexión respecto al eje *y* como si fuera $-f(x)$ en vez de $f(-x)$, que es lo correcto.

Los alumnos comprendieron y abordaron mucho mejor la traslación por medio de $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sin embargo, en este apartado lo normal fue ver intentos infructuosos por parte de los alumnos, y solo los mejores de los mejores fueron capaces de obtener la expresión correcta para $g(x)$ junto con su dominio.

**Pregunta 9**

El apartado (b) les resultó problemático a unos cuantos alumnos; así, muchos de ellos no tuvieron en cuenta la condición de convergencia de una serie geométrica. Muchos alumnos obviaron incluir los módulos en el desarrollo, por lo que inevitablemente perdieron los tres puntos a los que se podía optar en esta sección. Sin embargo, también se vieron soluciones claras y correctas.
El apartado (c) lo respondieron bien, en general, y la mayoría de los alumnos supieron atacar el problemático $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ que había en el numerador de la fracción. Se debería hacer hincapié nuevamente que esta pregunta es de tipo «*Mostrar que*» y que, por consiguiente, se les debería alentar a los alumnos a que muestren todos los pasos dados (cálculos/razonamientos) en el desarrollo del ejercicio.

**Pregunta 10**

A pesar de que muchas preguntas de este tipo han sido, por lo general, resueltas correctamente en pasadas convocatorias, esta pregunta en concreto ha resultado ser un mayor discriminador. Los alumnos más flojos no llegaron casi ninguno mucho más allá de la derivación de $x = a\sec\theta$, pero incluso aquí hubo errores manifiestos, y no fue infrecuente ver $\frac{dx}{d\theta} = a\sec x\tan x$. Los mejores alumnos fueron capaces de llegar hasta la integral de $\cos^2\theta$, y aproximadamente la mitad de estos supieron continuar utilizando la fórmula para $\cos 2\theta$. De vez en cuando se vio algún error fruto del despiste al sustituir los límites (incluso los mejores alumnos los cometieron) y resultó decepcionante ver, en unos pocos casos, que el alumno titubeaba y daba rodeos después de haber avanzado tanto en la pregunta.

**Pregunta 11**

El apartado (a) les resultó muy sencillo en todos los sentidos.

El apartado (b) también parece que les resultó accesible a la mayoría de los alumnos. El principal error que se vio fue tratar la pregunta como si fuera de tipo «escoger y reponer [los transistores]», por lo que estos alumnos perdieron algunos puntos, posiblemente (en algunos casos al menos) por haber leído el enunciado sin el debido cuidado. Los alumnos se sabían la fórmula del valor esperado y la aplicaron bien, aunque algunos de ellos todavía parecían decididos a dividir la respuesta final entre la frecuencia total.

**Pregunta 12**

Para el apartado (a) era necesario hallar la ecuación de una recta y expresarla de la forma $r = ...$, que es algo que no todos los alumnos hicieron.

A pesar de que en el apartado (b) se vio algún error fruto del despiste, la mayoría de los alumnos supieron cómo demostrar si dos rectas se cortan o no. Asimismo, muchos alumnos obtuvieron unos valores de $z$ contradictorios: $\frac{31}{4}$ y $\frac{3}{2}$.

En el apartado (c) la gran mayoría de alumnos comprendieron que había que utilizar el producto vectorial, y por lo general se aplicó bien.

En el apartado (d) hubo bastantes alumnos que trataron de utilizar en la fórmula $\cos 60$ en vez de $\cos 30$, que es lo correcto. Este fallo les llevó a hallar dos valores (incorrectos) de $k$, por lo que casi ninguno de estos alumnos logró aquí la máxima puntuación. De entre aquellos que sí que hallaron el valor correcto de $k$, la mayoría fueron capaces luego de proseguir y hallar correctamente el punto de corte (intersección).

**Pregunta 13**

Esta fue una pregunta en la que muchos alumnos obtuvieron una elevada puntuación; de hecho, muchos dieron con la respuesta correcta en los apartados (a) y (b). En el apartado (c) fue habitual ver fallos algebraicos fruto de un despiste, que en muchos casos se podría haber evitado si los alumnos hubiesen sido más cuidadosos y meticulosos con los cálculos (y con la presentación). El apartado (e) les resultó más difícil a aquellos que no se dieron cuenta de cómo había que dividir la integral. De todos modos, sí que era posible llegar hasta la respuesta correcta utilizando una sustitución con tan, y de hecho algunos alumnos (no muchos) sí que lo resolvieron de este modo.

**Pregunta 14**

De todas las preguntas de la sección B parece que ésta es la que peor abordaron los alumnos, aunque también hay algunos indicios de que a algunos alumnos les faltó tiempo para responderla.

Los alumnos respondieron bien a los apartados (a) y (b) aunque a un número sorprendentemente elevado de ellos les costó derivar $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ en el apartado (c). Si nos centramos en aquellos alumnos que se enfrentaron con éxito al apartado (c) parte ii, éstos utilizaron indistintamente alguno de los tres métodos que aparecen en el esquema de calificación publicado, y con los tres se lograron iguales tasas de éxito.

El apartado (d) no resultó especialmente complicado a la hora de determinar si la función era par o impar, pero muchos alumnos tuvieron dificultades para resolverlo porque no tenían muy claro cuál era la definición exacta de una función par y la de una impar. Es su conjunto, esta pregunta al menos resultó ser un buen discriminador; de hecho, los alumnos más hábiles casi lograron la máxima puntuación.

## Recommendations and guidance for the teaching of future candidates

- Prestar más atención a los últimos cambios introducidos en el programa de estudios.
- Se debería hacer más hincapié en utilizar la notación vectorial correcta, tanto en lo que respecta a la ecuación de una recta como a la hora de resolver problemas de geometría o de hacer demostraciones geométricas.
- Presentación general, especialmente cuando hay una cantidad significativa de cálculos algebraicos.

# Prueba 2

## Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 - 17 | 18 - 35 | 36 - 51 | 52 - 65 | 66 - 79 | 80 - 93 | 94 - 120 |

## Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

- Notación de sumatoria.
- Reconocer formas alternativas de la aceleración.
- Derivada de funciones compuestas.
- Manipulaciones algebraicas.
- Demostrar la naturaleza de un punto estacionario utilizando análisis.
- Utilizar el teorema de las raíces conjugadas.
- Preguntas de tipo aplicado sobre situaciones de la vida real.
- Hacer demostraciones mediante inducción matemática con rigor y dando los pasos correctos.
- Hallar la ecuación de la normal en un vértice con tangente vertical.
- Distribución de Poisson.

## Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

- Progresiones y series aritméticas.
- Integración por el método de sustitución e integración por partes.
- Distribución normal.
- Derivación implícita.
- Esbozo de gráficos y hallar áreas utilizando la calculadora de pantalla gráfica.
- Desarrollo de un binomio.
- Funciones inversas.
- Razones/tasas relacionadas.
- Álgebra con números complejos
- Trigonometría aplicada, y hallar el área de un sector circular y de un segmento.
- Utilizar la calculadora de pantalla gráfica para calcular integrales definidas, resolver ecuaciones y hallar probabilidades.

# Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas concretas

**Pregunta 1**

Los alumnos, por lo general, resolvieron acertadamente el apartado (a) (i), aunque algunos tuvieron problemas para determinar correctamente el número de términos (que era igual a 27). Parece que expresar la suma en notación de sumatorio constituyó todo un reto para los alumnos. Muchos alumnos utilizaron una notación incorrecta, otros dejaron este apartado sin responder, algunos no se dieron cuenta de que necesitaban utilizar $7+7n$ (el término general) con el número de términos comprendido entre $n=1$ y 27.
En el apartado (b) muchos alumnos plantearon correctamente una ecuación o una desigualdad, por lo que obtuvieron el punto de método, pero algunos fueron incapaces de resolver la desigualdad cuadrática. Por lo general los alumnos abordaron acertadamente esta pregunta.

**Pregunta 2**

Los alumnos, por lo general, resolvieron acertadamente el apartado (a) (i). La mayoría de los alumnos fueron capaces de determinar correctamente la media. Algunos alumnos tuvieron dificultades para hallar la desviación típica, con frecuencia debido a los errores cometidos en la resolución del sistema de ecuaciones o por haber utilizado valores $z$ incorrectos.

El apartado (b) lo resolvieron acertadamente, por lo general, aunque algunos alumnos no leyeron bien la pregunta y dejaron la respuesta como 0,184, en lugar de multiplicar la probabilidad por 100 para hallar el número esperado.

**Pregunta 3**

La inmensa mayoría de los alumnos resolvieron correctamente el apartado (a). Hubo unos pocos que leyeron mal el dominio, por lo que dieron como respuesta valores que estaban fuera del dominio especificado.

Asimismo, los alumnos también resolvieron muy bien el apartado (b). La mayoría de los alumnos plantearon correctamente la integral definida y utilizaron la calculadora de pantalla gráfica para calcular el área.

**Pregunta 4**

Por lo general, los alumnos resolvieron muy bien el apartado (a); de hecho, la mayoría obtuvo el ángulo correcto bien en radianes o en grados.

Sin embargo, el apartado (b) no lo resolvieron todo lo bien que cabría esperar para una pregunta bastante estándar como era ésta. La mayoría de los alumnos se dieron cuenta de que tenían que hallar el área tanto del sector circular como del triángulo, restar un valor de otro y multiplicar por dos el resultado. Sin embargo, muchos alumnos cometieron errores al hacer los cálculos, por lo que no obtuvieron la respuesta correcta (que era 1,18 $cm^2$). Otro error habitual fue configurar incorrectamente la calculadora de pantalla gráfica (CPG) (en grados, en lugar de en radianes) o utilizar una combinación de radianes y grados en el cálculo del área con una única configuración en la CPG.

**Pregunta 5**

Esta pregunta la resolvieron razonablemente bien. La mayoría de los alumnos fueron capaces de desarrollar en potencias cada uno de los binomios correctamente. Algunos alumnos optaron por trabajar únicamente con los términos requeridos. Fue grato ver un número bastante elevado de respuestas correctas en una pregunta que no era especialmente sencilla. Los errores más habituales se debieron a que el alumno no consideró los dos términos que contribuyen al término en $x^{-2}$ o a que cometió errores de signo.

**Pregunta 6**

A muchos alumnos el apartado (a) les pareció difícil. La mayoría se dieron cuenta de que tenían que utilizar la distribución binomial en el apartado (a) (ii); sin embargo, hubo muchos alumnos que no estaban seguros de cómo tenían que resolver el apartado (a) (i). Muchos dieron la misma respuesta en ambos apartados, sin percatarse de las diferencias en el enunciado de la pregunta. En el apartado (a) (i) algunos alumnos utilizaron la suma $\left(0.6^3+0.4^3\right)$ en vez de calcular el producto de las probabilidades $\left(0.6^3\times 0.4^3\right)$.

Muchos alumnos tuvieron dificultades para acometer el apartado (b) y no fueron capaces de proseguir con éxito más allá de la ecuación o desigualdad inicial. Casi todos los que obtuvieron $0.6^n<0.005$ resolvieron correctamente la desigualdad anterior utilizando la calculadora de pantalla gráfica, bien por métodos gráficos o por métodos numéricos.

**Pregunta 7**

La mayoría de los alumnos resolvieron muy acertadamente ambos apartados, y en muchos casos obtuvieron la máxima puntuación.

Entre los errores más habituales cometidos en el apartado (a) estaban: escribir una ecuación incorrecta para la asíntota horizontal o no mostrar correctamente el comportamiento asintótico.

En el apartado (b) la mayoría de los alumnos obtuvo correctamente la ecuación de la función inversa. Algunos no la escribieron en la forma correcta, como $f^{-1}(x)$, y otros olvidaron indicar el dominio de la función inversa o cometieron un error a la hora de definir dicho dominio.

**Pregunta 8**

Esta pregunta les supuso todo un reto a mucho alumnos.
En el apartado (a) la mayoría de los alumnos utilizaron el cuadernillo de fórmulas para plantear una ecuación para la media, pero luego fueron incapaces de resolver la ecuación polinómica para hallar la media u obtuvieron un valor que era incorrecto.

Hubo poquísimos alumnos que resolvieran correctamente el apartado (b), pues muchos no se percataron de la relación que existe entre la media y la desviación típica en una distribución de Poisson. De entre aquellos que calcularon el valor de la desviación típica, muy pocos supieron cómo plantear la condición de que estuviera «a menos de una desviación típica de la media», y todavía menos alumnos consiguieron utilizar la calculadora de pantalla gráfica para obtener la respuesta requerida.

**Pregunta 9**

Muchos alumnos respondieron bastante bien a esta pregunta sobre «ritmos relacionados». Se utilizaron varios métodos distintos para su resolución, aunque lo más habitual fue utilizar $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\times\frac{dh}{dt}$.. Algunos alumnos utilizaron con bastante éxito la derivación implícita. Así, se vieron muchas respuestas correctas en esta pregunta. Entre los errores más frecuentes estaban: errores al hacer la derivada implícita o no darse cuenta de que $h=r$. Esta pregunta sobre ritmos relacionados tuvo una respuesta mejor que otras preguntas similares planteadas en convocatorias anteriores.

**Pregunta 10**

La mayoría de los alumnos hicieron un buen intento de abordar la derivada implícita del apartado (a). Muchos perdieron el punto final por los errores cometidos en la simplificación.
En el apartado (b) fue sorprendente ver que muchos alumnos no prosiguieron cuando, al calcular la derivada en (1, 1), obtuvieron un resultado indefinido. Muchos alumnos calcularon correctamente la pendiente de la tangente como una fracción con cero en el denominador, pero no supieron cómo hacer una interpretación geométrica de este resultado y, por consiguiente, no prosiguieron más allá de este punto.

**Pregunta 11**

Resultó interesante ver que los alumnos, en esta pregunta sobre distribuciones continuas, o la resolvieron fenomenal, obteniendo con frecuencia la máxima puntuación, o ni siquiera intentaron abordarla. Hubo poquísimos casos intermedios. En el apartado (a) la mayoría de los alumnos se dieron cuenta de que había que realizar una integración por partes; solo hubo unos pocos alumnos que trataran de utilizar aquí la calculadora de pantalla gráfica. El error más habitual en este apartado fue cometer un error de signo en la integración por partes.

El apartado (b) lo resolvieron muy bien: la mayoría de los alumnos escribieron la integral definida correcta y utilizaron la calculadora de pantalla gráfica para evaluar la probabilidad.

En el apartado (c) la mayoría de los alumnos trataron de hallar la mediana y la moda; todavía hubo algunos que dieron el valor de la coordenada *y* en vez de dar el de la coordenada *x* para la moda, y hubo otros que no supieron utilizar la calculadora de pantalla gráfica para calcular el valor para el límite superior.

El apartado (d) parece que fue el que más dificultades planteó. A pesar de que los alumnos se dieron cuenta de que en este problema había que recurrir a la probabilidad condicionada, tuvieron verdaderas dificultades para identificar qué probabilidad tenían que incluir en el numerador.

**Pregunta 12**

El apartado (a) les resultó muy accesible a los alumnos, teniendo en cuenta que se les daba la respuesta en el enunciado y que casi todos lograron aquí la máxima puntuación.

La mayoría de los alumnos acometieron el apartado (b) (i), con un resultado razonablemente bueno. Entre los errores más habituales estuvo olvidar incluir $\frac{1}{2}$ al utilizar la regla de la cadena. Algunos alumnos tuvieron problemas para derivar el segundo término de la función de coste y cometieron errores en la derivación. $1000k$.

En el apartado (b) (ii) la mayoría de los alumnos igualaron el $\frac{dC}{dx}$ a cero y trataron de resolver la ecuación. De entre aquellos alumnos que derivaron correctamente, casi todos obtuvieron luego el valor correcto de $x$ para el cual el coste total es mínimo. Algunos alumnos dieron respuestas poco razonables o no válidas para $x$. El justificar que se trata de un mínimo recurriendo a la segunda derivada es un método que o bien ni siquiera se intentó utilizar o bien estuvo falto de valores numéricos, por lo que la justificación fue incompleta. Algunos alumnos eligieron un enfoque gráfico para mostrar el cambio de signo de la primera derivada, pero no incluyeron suficientes detalles en el esbozo.
Los apartados (c), (d) y (e) fueron bien resueltos por aquellos alumnos que acometieron el resto del problema. Algunos alumnos no estaban muy seguros de cómo hallar el aumento porcentual del coste total mínimo. Hubo algunos alumnos que dejaron en blanco algunos apartados, especialmente aquellos que contenían expresiones con $k$ .

**Pregunta 13**

El apartado (a), en el que había que hacer una demostración por inducción matemática, no se resolvió acertadamente; de hecho, hubo poquísimos alumnos que obtuvieran la máxima puntuación en este apartado. Muchos alumnos aplicaron las propiedades de la multiplicación de números complejos en forma módulo-argumental para completar el paso inductivo de la demostración. A algunos alumnos no les quedó del todo claro que lo que tenían que hacer era demostrar el teorema de De Moivre y que no podían utilizarlo en la demostración. Además, los alumnos con frecuencia perdieron el primer punto de razonamiento por no mostrar claramente que $P(1)$ es verdadero, sin hacer ninguna referencia a los lados izquierdo y derecho de la ecuación. Del mismo modo, el lenguaje que se necesita en el paso de suposición resultó problemático para muchos alumnos, quienes afirmaron haber demostrado que $P(k)$ era verdadero, o dijeron únicamente «supongamos que $n = k$», en vez de suponer que $P(k)$ es verdadero.

Los alumnos resolvieron muy bien el apartado (b), aunque algunos dieron un argumento incorrecto para $v$ sin comprobar previamente en qué lugar del plano de Argand se encontraba el punto $B$. Algunos alumnos dejaron sin simplificar la respuesta a (b) (ii), lo que en esta ocasión resultó aceptable puesto que se admitían formas equivalentes.

En el apartado (c), a la hora de situar los puntos $A$ y $B$ en los ejes a menudo se hizo de modo impreciso, faltando las escalas y los rótulos apropiados.

El apartado (d) resultó ser todo un reto; de hecho, sólo hubo unos pocos alumnos que mostraran las rotaciones correctas. La mayoría de los alumnos utilizaron la simetría axial (en vez de la rotación) o rotaron el punto en el sentido equivocado.

La mayoría de los alumnos acometieron al menos el apartado (e) y reconocieron los pares de raíces conjugadas y trataron de hallar cada ecuación cuadrática. Sin embargo, muchos alumnos cometieron errores en el desarrollo algebraico y, por consiguiente, no pudieron obtener la máxima puntuación. Por lo general, en este apartado no se obtuvieron muy buenos resultados.

**Pregunta 14**

Los alumnos no resolvieron demasiado bien el apartado (a): hubo muchos que hicieron un esbozo del gráfico utilizando un dominio incorrecto o que copiaron mal la coordenada *y* del máximo y escribieron 0,884 en vez de 0,0844. La mayoría de los alumnos que hicieron el esbozo del gráfico dibujaron la forma correcta, con el correspondiente comportamiento asintótico.

Los alumnos resolvieron el apartado (b) razonablemente bien. Dado que la sustitución se daba ya en el enunciado, la mayoría de los alumnos fueron capaces de expresar correctamente la integral en función de *u*. La mayoría de los alumnos se dieron cuenta de que se trataba de una integral de tipo $\arctan$. Entre los errores más habituales estuvieron: olvidar poner un $\frac{1}{2}$ delante de la integral y no sustituir *u* por $t^2$ en el paso final.

En el apartado (c) los alumnos entendieron bien qué tenían que hacer para calcular la distancia. La mayoría de los alumnos escribieron correctamente la integral definida en función de $t$, e intentaron utilizar el resultado obtenido en (b) para obtener la respuesta exacta. Algunos alumnos utilizaron una calculadora de pantalla gráfica para obtener el valor numérico, por lo que no obtuvieron los dos puntos restantes.

A muchos alumnos el apartado (d) no les resultó accesible y quedó patente su falta de conocimientos sobre formas alterativas de la aceleración. Fue muy poco habitual el ver una respuesta correcta en este apartado. Unos pocos alumnos trataron de hallar $\frac{dv}{ds}$ pero no fueron capaces de seguir avanzando más allá de este punto. Algunos sustituyeron números en la expresión de $\frac{dv}{ds}$ y dieron esto como valor de la aceleración, sin multiplicarlo por $v$.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

- Haga hincapié en la necesidad de plantear correctamente las demostraciones por inducción matemática y de hacerlas con rigor, mostrando de manera lógica cada paso que se vaya dando. Hay que ceñirse a la formalidad de la demostración, y los alumnos tienen que ser conscientes de que no pueden utilizar en la demostración aquello que se les ha pedido que demuestren.
- Aliente a los alumnos a almacenar las respuestas numéricas obtenidas con la calculadora de pantalla gráfica o muéstreles cómo se puede ir pasando por los distintos pasos de los que consta el ejercicio utilizando un número suficiente de cifras significativas, de modo que la respuesta final sea correcta y tenga el grado de precisión apropiado.
- Los alumnos tienen que recordar que las respuestas finales tienen que ser totalmente precisas o hay que darlas redondeando a 3 cifras significativas, y que para los cálculos/razonamientos intermedios es necesario utilizar más de 3 cifras significativas.
- Aliente a los alumnos a que utilicen la calculadora de pantalla gráfica (CPG) para resolver ecuaciones y para integrar numéricamente y proporcióneles un abanico amplio de problemas que les permitan explorar funciones más avanzadas de la CPG.
- Todavía hay muchos alumnos que erróneamente creen que van a obtener una puntuación más alta por utilizar enfoques algebraicos farragosos y propensos a errores. Estos alumnos sufren una penalización implícita, pues pierden un tiempo precioso en las preguntas más sencillas, y con frecuencia no tienen tiempo suficiente para responder a todas las preguntas de la prueba.
- Promueva una mayor concienciación sobre la importancia que tienen las destrezas básicas de bosquejo de gráficos, incluyendo un análisis meticuloso del dominio (el que resulta realista o el dado en el enunciado), el recorrido, las características más importantes del gráfico y su comportamiento asintótico.
- Recuerde a los alumnos que han de leer las preguntas muy detenidamente y con mucha atención. ¡Recuérdeles que 0,184 no es un número de oseznos adecuado!
- Acláreles el significado de todos y cada uno de los términos de instrucción que aparecen en la guía de Matemáticas NS.
- Haga hincapié en cómo se han de responder de manera convincente las preguntas de examen de tipo «Muestre que..» y deles muchos ejemplos de demostraciones matemáticas.
- Explíqueles a los alumnos que cuando en la pregunta de tipo «Mostrar que» se pida una respuesta exacta no se puede utilizar la calculadora de pantalla gráfica.
- Se les debería alentar a los alumnos a que presten atención a la notación matemática y a que utilicen la terminología apropiada.
- Los alumnos tienen que cubrir todo el programa de estudios.
- Los profesores deberían facilitar un abanico de problemas variados (que no sean los típicos y que giren en torno a situaciones de la vida real) en los que los alumnos tengan que utilizar sus destrezas de reflexión y de resolución de problemas. Es importante que comprueben si las

respuestas dadas a este tipo de preguntas resultan razonables, son válidas y cumplen las restricciones impuestas.

# Prueba tres - Matemáticas discretas

## Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 – 7 | 8 – 14 | 15 - 21 | 22 - 26 | 27 - 32 | 33 - 37 | 38 - 60 |

# Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Los alumnos no parecían sentirse especialmente cómodos con las relaciones de recurrencia. Dado que este tema es nuevo en el programa de estudios, pensé que los profesores se habrían encargado de cubrirlo bien y a fondo. Tal y como sucedió en el pasado, a los alumnos les costó más idear ellos mismos una demostración que cuando simplemente tienen que aplicar algoritmos que ya conocen.

# Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Los alumnos demostraron conocer bien los algoritmos del límite superior y del límite inferior en el problema del viajante, así como los métodos para pasar de una base a otra.

# Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas concretas

**Pregunta 1**

(a)Lo dibujaron bien [el grafo]. (b) Por lo general los alumnos respondieron bastante acertadamente. Hubo demasiada confusión con el método del límite superior basado en doblar la longitud del árbol generador minimal. A algunos alumnos se les olvidó volver a D. (c) Por lo general las respuestas fueron acertadas. A algunos alumnos se les olvidó volver a añadir las 2 aristas de menor tamaño que partían de A.

**Pregunta 2**

(a) (i) La mayoría de los alumnos conocían uno de los dos métodos. Algunos no se dieron cuenta de que 11 era B en base 13. Unos pocos alumnos, muy flojos todos, pensaron que los números dados en el enunciado ya estaban en base 13. (ii) Este apartado tuvo respuestas deficientes: la mayoría de los alumnos ignoraron el «A partir de lo anterior...» del enunciado y se limitaron a aplicar el algoritmo de Euclides a los números en base 10 originales. Hubo unos pocos alumnos que sí que leyeron detenidamente el enunciado y vieron qué es lo que tenían que hacer.

(b) Hubo una considerable variedad de respuestas, y algunos alumnos directamente ignoraron este apartado. Un error habitual fue suponer unos número concretos para los elementos del conjunto L. Aquellos alumnos que en lo primero que pensaron fue en el principio del palomar fueron bastante razonables en su planteamiento.

(c) (i) Este apartado lo resolvieron bien; solo hubo algún error con el signo menos (fruto del despiste) en alumnos poco hábiles con el álgebra. (ii) Hubo una amplia variedad de respuestas. Hubo demasiados alumnos que no leyeron lo que decía el enunciado sobre «módulo 2». La conversión inicial hizo que el sistema de ecuaciones resultara sencillo. No hubo suficientes alumnos que se dieran cuenta de que si trabajaban desde un principio «mód 2», en ese caso podían resolver el sistema de ecuaciones con la calculadora en vez de estar luchando contra viento y marea. Con frecuencia la respuesta dada no se había pasado a mód 2.

Los alumnos resolvieron el apartado (d) (i) razonablemente bien. Algunas explicaciones podrían haber estado más claras. Lamentablemente, hubo unos pocos alumnos que pensaron que bastaba con dar unos pocos ejemplos. (ii) Este apartado lo resolvieron bien. (iii) Aquí, o bien el alumno vio el contraejemplo que podía dar o no lo vio.

**Pregunta 3**

(a) A esta pregunta los alumnos respondieron razonablemente bien, pero hubo demasiados que no leyeron el enunciado, donde decía «Dibuje [con precisión] un árbol generador» y que, por lo tanto, se limitaron a dibujar $K_4$ y $K_{4,4}$.

(b) Este apartado no lo resolvieron acertadamente. Solo un número insuficiente de alumnos se dieron cuenta de que había que aplicar el principio del palomar. Fue una pena que los alumnos pensaran que bastaba con dar unos pocos ejemplos. Otros se limitaron a escribir cosas que sabían relativas a los grafos y afirmaron que con eso quedaba probado el resultado.

(c) Este apartado recibió unas respuestas muy deficientes, realmente. Los alumnos se limitaron o bien a dar algunos ejemplos o a decir que era cierto porque era obvio que era cierto. Se requería una reflexión esmerada y meticulosa para describir cómo se obtiene el árbol generador.

**Pregunta 4**

Dado que resolver una relación de recurrencia es, en esencia, un ejercicio estándar que forma parte del programa de estudios, me sorprendió que los alumnos no lograran mejores resultados en esta pregunta.

(a)(i) Esto lo podrían haber resuelto de dos maneras: o dándose cuenta de que se trataba de una progresión geométrica o utilizando la ecuación auxiliar. (ii) Hubo, con creces, demasiados alumnos que no utilizaron la solución sugerida y se limitaron a sustituirla en la relación. (iii) Aquí los alumnos no obtuvieron demasiados puntos puesto que muchos de ellos ya se habían equivocado en anteriores apartados.

(b) La resolución de la ecuación auxiliar debería haber sido el método estándar, pero hubo demasiados alumnos que no lo consiguieron hacer. Poner la respuesta en el formato requerido supuso un reto mayor para los alumnos, que es algo que cabe esperar del último apartado de la última pregunta. Me gusta la forma de pensar de uno de los alumnos que sí que logro responder correctamente a este apartado, y que a continuación escribió «eso ha estado guay».

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

A pesar de que esta opción contenía gráficos y árboles, ¡en algunas de las preguntas no era necesario que los alumnos utilizaran papel milimetrado! Esto dificultó la lectura de las respuestas dadas por aquellos alumnos que sí lo utilizaron, ya que los exámenes se escanean antes de ser enviados. Los alumnos perdieron puntos por no leer con el suficiente detenimiento lo que realmente decía la pregunta y por no utilizar las pistas que había en el enunciado de la pregunta. Si un alumno introduce una variable que no se da en el enunciado de la pregunta, en ese caso tiene que explicar qué representa dicha variable para que así el examinador pueda seguir el desarrollo del ejercicio.

Los alumnos tienen que recordar que están tratando de comunicarse con el examinador, por lo que incluir explicaciones escritas y diagramas hechos con cuidado y esmero siempre les va a servir de ayuda. Los alumnos tienen que estar preparados tanto para hacer demostraciones como para aplicar algoritmos, y han de saber que con explicaciones ostentosas pero que contienen mucha paja casi nunca se logran muchos puntos. A los alumnos les resultará útil observar en detalle cuál es la estructura de las demostraciones que aparecen en los esquema de calificación de los exámenes previos. Por ejemplo, está bien que recuerden que uno no puede empezar con aquello que está tratando de demostrar, o que los ejemplos no son demostraciones. No nos cansamos de recalcar estos dos últimos puntos: es fundamental que todos transmitamos este mensaje y se lo hagamos llegar a los alumnos. Teniendo presentes muchos de los puntos mencionados anteriormente, un examen de prueba corregido con esmero y detenimiento debería haberles servido de ayuda a los alumnos, si éstos estuviesen preparados para aprender. Es importante que la enseñanza impartida cubra todo el programa de estudios.

# Prueba tres - Análisis

## Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 - 9 | 10 - 19 | 20 - 26 | 27 - 33 | 34 - 40 | 41 - 47 | 48 - 60 |

# Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

La mayoría de alumnos se encontraron con dificultades para abordar el teorema de Rolle. En algunos casos quedó claro que los alumnos desconocían totalmente el enunciado de este teorema. Otros alumnos sabían que tenían que considerar el valor de las funciones en los extremos de un intervalo dado, pero nada más. En su conjunto, hubo indicios de falta de comprensión del teorema de Rolle y de falta de aptitudes par su aplicación.

Otras áreas que plantearon dificultades a los alumnos fueron: el uso de factores de integración para resolver una ecuación diferencial lineal y la realización de pruebas en los extremos de un intervalo para comprobar la convergencia de una serie de potencias. Muchos de los alumnos también tuvieron dificultades para evaluar integrales impropias. Además, la mayoría de los alumnos no parecían ser conscientes de la necesidad de ajustar los límites de integración cuando se realiza un cambio de variable.
Sorprendentemente, muchos alumnos tuvieron problemas para utilizar la calculadora de pantalla gráfica para elaborar un esbozo razonable de un gráfico que contuviera la información que se pedía en el enunciado.

Por lo general, la comunicación matemática fue deficiente y muchos alumnos parecían no saber cómo encarar preguntas con los términos de instrucción «Mostrar que» y «A partir de lo anterior».

# Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Parece que los alumnos abordaron acertadamente conceptos básicos como derivadas, límites, integrales, progresiones y series. La mayoría de los alumnos trataron de resolver las preguntas 1, 2 y 3, demostrando así que estaban familiarizados con los temas tratados y que podían, al menos, empezar a responder a las preguntas. Parece que el desarrollo en serie de Maclaurin era un tema que, en general, los alumnos llevaban bien preparado. Además, la mayoría de los alumnos estaban familiarizados con el uso del criterio de D'Alembert para hallar el radio de convergencia.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas concretas

**Pregunta 1**

Por lo general, hubo muchos alumnos que supieron cómo abordar Q1(a) pero muchos escribieron los resultados que ya venían dados en el enunciado y no mostraron ningún paso adicional relevante.

En cuanto al apartado (b), casi todos los alumnos lo abordaron y la mayoría lo resolvieron correctamente. La mayoría de los alumnos dedujeron el desarrollo en serie a partir del concepto pero en unos pocos casos los alumnos utilizaron el desarrollo en serie de la función exponencial para deducir el resultado. Este último enfoque dio lugar a más errores de cálculo.

En el apartado (c) muchos alumnos ignoraron la instrucción «A partir de lo anterior» y trataron de hallar el límite utilizando la regla de L'Hôpital. Muchos alumnos dieron la respuesta incorrecta $\frac{1}{2}$ debido a los errores de cálculo cometidos; más concretamente, a la eliminación inadecuada de los paréntesis.

El apartado (d) planteó dificultades a muchos alumnos, quienes no fueron capaces de dar con una sustitución apropiada. Entre los alumnos que sí que utilizaron una sustitución hubo muy pocos que se dieran cuenta de la necesidad de calcular el límite de integración inferior, lo que en muchos casos condujo a una respuesta incorrecta. Este apartado de la pregunta también puso en evidencia los problemas que tienen los alumnos para plantear y estructurar su trabajo debidamente, haciendo uso de la notación correcta. Resultó sorprendente ver cómo muchos alumnos no se dieron cuenta de que la integral era errónea en sí misma, y no hicieron ningún intento por estudiar su convergencia.

**Pregunta 2**

En su conjunto, los alumnos abordaron bien esta pregunta. En el apartado (a), la mayoría de los alumnos fueron capaces de hallar la derivada, aunque luego algunos, en el apartado (ii), no utilizaron correctamente la regla de la cadena. Un número sorprendentemente elevado de alumnos no se percató de la relación que existe entre una función creciente y una función de pendiente positiva en el intervalo dado.

En el apartado (b) (i) la mayoría de los alumnos que se dieron cuenta de que la ecuación diferencial era lineal la escribieron en forma estándar, muchos hallaron correctamente el factor de integración y, a continuación, resolvieron la ecuación exacta así obtenida. No obstante, unos pocos alumnos perdieron puntos al final debido a errores por descuido. Además, también hubo algunos alumnos que trataron la ecuación como si fuera homogénea y perdieron el tiempo tratando de resolverla utilizando sustitución.

En el apartado (b) (ii) algunos alumnos perdieron puntos por limitarse a comprobar que la función dada era una solución de la ecuación diferencial que satisfacía las condiciones iniciales dadas en el enunciado.

En el apartado (b)(iii) la mayoría de los alumnos consiguió dibujar aproximadamente el gráfico, pero en muchos casos el esbozo no estaba rotulado, o mostraba asíntotas incorrectas, o un valor del mínimo que era erróneo. Asimismo, muchos alumnos ignoraron el dominio y esbozaron el gráfico de la expresión para $x < 1$.

**Pregunta 3**

En el apartado (a), la mayoría de los alumnos fueron capaces de hallar correctamente la expresión para b(n) y para c(n). Lamentablemente, algunos alumnos perdieron un punto en el apartado (a) porque no respondieron a lo que les habían preguntado, pues dieron un intervalo de convergencia en lugar del radio de convergencia.

Por lo general los alumnos resolvieron acertadamente el apartado (b): prácticamente todos sabían cómo empezar y qué hacer. Sin embargo, algunos alumnos no utilizaron debidamente el criterio de D´Alembert para determinar la convergencia de la serie de potencias, y unos pocos aparentemente no se dieron cuenta de que la convergencia de la serie depende de los valores de $x$.

Hubo muchos alumnos que no fueron capaces de discutir (desde un punto de vista matemático) sobre la convergencia en $x = \pm 1$. Además, en el apartado (c), hubo muchos alumnos que no justificaron debidamente el uso de la prueba de las series alternadas.

**Pregunta 4**

El apartado (a) los alumnos lo abordaron bien, aunque hubo una amplia diversidad en las puntuaciones logradas. Hubo algunos alumnos que no se dieron cuenta de que había que dar respuestas exactas y trataron de utilizar la calculadora de pantalla gráfica para responder a la pregunta, por lo que perdieron puntos por precisión. Esta era otra pregunta en la que quedó patente la dificultad que tienen muchos alumnos para plantear y estructurar su trabajo de manera lógica.

En cuanto al apartado (b), para la mayoría de los alumnos esta pregunta supuso todo un reto. Algunos, para empezar, no entendían o no sabían cómo utilizar el teorema de Rolle. Muchos la dejaron en blanco o trataron de utilizar algún teorema aleatorio aprendido en la asignatura. Hubo también muchos alumnos que trataron de utilizar el teorema de Bolzano o el teorema del valor medio. Poquísimos alumnos lograron la máxima puntuación en este apartado de la pregunta.

El apartado (b) también puso de manifiesto que muchos alumnos no eran conscientes de las implicaciones que tiene la continuidad y la derivabilidad de una función sobre el comportamiento de su gráfico dentro del intervalo dado. Como en preguntas anteriores, muchos alumnos ignoraron las instrucciones «Demostrar que» y «A partir de lo anterior» y trataron de responder a las preguntas utilizando la calculadora de pantalla gráfica.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza a futuros alumnos

- Exija a los alumnos que muestren todos sus cálculos utilizando la notación y la terminología apropiadas; recuérdeles que el trabajo de la asignatura incluye también el responder a las preguntas de una manera clara y lógica.

- Enfatice la necesidad de mostrar todo el desarrollo del ejercicio (cálculos y razonamientos) y de presentarlo con claridad, mimo y esmero. Hubo muchos alumnos cuyos razonamientos resultaban difíciles de seguir y eran muy desordenados y descuidados.

- Los errores sencillos de tipo algebraico/numérico pueden tener consecuencias graves para la calificación final, por lo que es necesario recordarles a los alumnos que tienen que comprobar los pasos dados para así evitar esos errores banales fruto del descuido.

- Identifique y siga las instrucciones asociadas a cada uno de los términos de instrucción del IB (p. ej., «A partir de lo anterior», «Demuestre que» y «Muestre que»).

- Los profesores, al inicio de esta opción, deberían asegurarse de que sus alumnos se sientan muy cómodos derivando e integrando. Aquí se incluye también el saber y el comprender bien la integración por partes y la integración por sustitución y el identificar en qué situaciones tienen que aplicar cada una de estas técnicas.

- Dé un amplio abanico de ejemplos de cuál es la relación que hay entre el comportamiento de una función y el de sus derivadas, incluyendo aquí las funciones definidas por tramos y las funciones con dominios restringidos (en vez de considerar los dominios mas amplios posibles, compatibles con su expresión).

- Enseñe a los alumnos cómo hay que abordar las integrales impropias.

- Clarifique los métodos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales: los alumnos tienen que ser capaces de reconocer de qué tipo es la ecuación antes de ponerse a aplicar un método concreto para resolverla.

- Enfatice la necesidad de estudiar en detalle los extremos a la hora de establecer el intervalo de convergencia de una serie de potencias, y asegúrese de que los alumnos conocen la diferencia entre un radio de convergencia y un intervalo de convergencia.

- Explore en más detalle la continuidad y la derivabilidad, así como los teoremas relacionados. Asimismo, recalque la importancia de que se cumplan plenamente las condiciones de un teorema antes de proceder a aplicarlo.

- Aunque hubo algunos alumnos muy bien preparados, también quedó patente que algunos alumnos no lo estaban tanto, puesto que lograron muy pocos puntos. Los profesores tienen que aclararles a los alumnos cuáles son las expectativas de las distintas asignaturas de matemáticas del PD y guiar a los alumnos para que escojan el nivel que resulte apropiado para ellos.

# Prueba tres - Conjuntos, relaciones y grupos

## Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 - 6 | 7 - 13 | 14 - 21 | 22 - 27 | 28 - 32 | 33 - 38 | 39 - 60 |

# Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

En esta opción concreta las demostraciones y la justificación de las respuestas tienen una importancia máxima. Hubo pocos indicios de que los alumnos fueran conscientes de este hecho, excepto en los niveles de logro más altos. Muchos alumnos tuvieron problemas para descifrar la terminología estándar que se utiliza para definir un subconjunto en función de una condición impuesta a todos los elementos del conjunto. Esto quedó patente tanto a la hora de entender el enunciado de las preguntas como de expresar las respuestas. Hubo muchos alumnos que no tenían muy claros los nuevos conceptos introducidos en el programa de estudios de «homomorfismo», «núcleo (de un homomorfismo)» y «clases laterales». A muchos alumnos parece que les costaba asimilar la idea de que en un producto cartesiano pueda haber factores tanto continuos como discretos.

## Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

La mayoría de los alumnos se sintieron cómodos trabajando con tablas de Cayley y extrayendo de ellas la información que se pedía en el enunciado. Los alumnos entendían bien la definición de grupo. También entendían bien los aspectos generales de las relaciones de equivalencia.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas concretas

**Pregunta 1**

La mayoría de los alumnos lograron una buena puntuación en esta pregunta.

(a) Era difícil equivocarse.

(b) Por lo general lo resolvieron acertadamente. Una muy pequeña minoría confundieron propiedad conmutativa con asociativa.

(c) Por lo general lo resolvieron bien pero a uno, en ocasiones, le queda la duda latente de si el alumno realmente ha entendido el quid de la cuestión. En algunos casos había un argumento no válido basado en la cancelación: no tenemos un grupo, por lo que no se puede cancelar cuando a uno le apetece.

(d) Por lo general lo resolvieron acertadamente.

(e) Por lo general lo resolvieron acertadamente, pero en ocasiones el examinador se veía obligado a extraer la respuesta de un montón de datos.

**Pregunta 2**

(a) (i) Todos los examinadores comentaron la sorprendente incapacidad de muchos alumnos para responder correctamente este apartado. Si el doble de un número es un entero, eso significa que el número es la mitad de un entero. Claramente uno de los problemas en este ámbito es el no entender bien la notación de conjuntos.

(b) (i) Se tuvo la sensación de que muchos alumnos no saben cómo expresar debidamente un concepto en álgebra sencilla. Así, aRb => bRa pasa a ser aRb = bRa, lo que no tiene ningún sentido. La idea de una relación simétrica se abordó de manera muy deficiente.

**Pregunta 3**

Hubo muchos alumnos que no se sentían cómodos con el concepto de producto cartesiano, y que tampoco tenían la habilidad de visualizar y manejar dichos conjuntos.

**Pregunta 4**

Esta pregunta se había visto en clase; de hecho estaba sacada directamente del programa de estudios. Muchos alumnos no estaban familiarizados con los conceptos de núcleo y clase lateral.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

Esta es una opción en la que los conceptos y la comprensión son más importantes que las habilidades de manipulación que se requieren. Asegúrese de que los alumnos tengan esto presente y que estén preparados para afrontar este desafío. La notación de conjuntos es clave para esta opción, así que déjeles claro, mediante ejemplos, las diversas formas en las que se pueden definir los conjuntos, tanto finitos como infinitos y de varias dimensiones. Las demostraciones estructuradas son importantes, así que haga hincapié en este aspecto. Asegúrese de que los alumnos escriban con claridad, especialmente cuando se tengan que incluir diagramas. El examinador no puede leer la mente del alumno, por lo que éste tiene que dejar claro que entiende bien lo que está escribiendo como respuesta a la pregunta.

Asegúrese de que se cubran todos los elementos del programa de estudios.

## Prueba tres - Estadística y probabilidad

### Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Puntuaciones:** | 0 – 7 | 8 - 15 | 16 - 21 | 22 - 27 | 28 – 33 | 34 – 39 | 40 – 60 |

## The areas of the programme and examination which appeared difficult for the candidates

Muchos alumnos alargaron algunos apartados de la Pregunta 2 mucho más de lo necesario por no sacar el máximo provecho del software de la calculadora. No tiene ningún sentido hallar coeficientes de correlación, valores *p* y ecuaciones de rectas de regresión utilizando la calculadora para hallar $\Sigma x$, etc. y luego calcular estas otras cantidades utilizando las fórmulas apropiadas. Los alumnos tienen que conocer todas las prestaciones incluidas en el menú de estadística de su calculadora.

Algunos alumnos parecían no estar muy seguros de cómo manejar las funciones generatrices de probabilidad. Es importante tener presentes las diversas definiciones de la función generatriz de probabilidad, para poder elegir aquella que resulte más adecuada para resolver un problema concreto. Parece que hay muchos alumnos que no entienden el concepto de estimación sin sesgo.

## Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

A pesar de los comentarios hechos en la sección anterior, parece que los alumnos entienden bastante bien los conceptos de correlación y regresión.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar cada una de las preguntas concretas

### Pregunta 1

La mayoría de los alumnos resolvieron correctamente el apartado (a)(i). Sin embargo, en (a)(ii) un error nada infrecuente fue decir que $\mathrm{P}(5 \le X \le 8) = \mathrm{P}(X \le 8) - \mathrm{P}(X \le 5)$. En cuanto al apartado (b), la mayoría de los alumnos lo resolvieron acertadamente. El apartado (c)(i) en general lo resolvieron bien: casi todos los alumnos utilizaron el Teorema central del límite. Fue sorprendente constatar que muy pocos alumnos convirtieron la probabilidad a $\mathrm{P}(284 < \Sigma X < 340)$, lo que posteriormente podría haber sido evaluado como una probabilidad de Poisson. Muchos alumnos fueron incapaces de darse cuenta de cómo había que resolver (c)(ii).

**Pregunta 2**

La mayoría de los alumnos plantearon correctamente las hipótesis, aunque aquellos que olvidaron mencionar $p$ fueron penalizados. Fue decepcionante comprobar que muchos alumnos, por elegir el menú erróneo en la calculadora, se vieron envueltos en líneas y líneas de cálculos aritméticos a la hora de responder a (b), (c) y (d). Una elección correcta de software habría proporcionado los resultados necesarios de manera inmediata. El apartado (f) lo respondieron deficientemente, en general; de hecho, hubo muchos alumnos que directamente no tenían ni idea de lo que tenían que hacer. Hubo muchos alumnos que escribieron la recta de regresión de $x$ sobre $y$ como $y = 0.409x - 12.2$ en lugar de $x = 0.409y - 12.2$, por lo que la pendiente que hallaron era incorrecta. Por consiguiente, la respuesta $38°$ (que es incorrecta) se vio con mayor frecuencia que la respuesta correcta $7°$.

**Pregunta 3**

El apartado (a) no lo respondieron acertadamente, en general; de hecho, hubo muchas soluciones que ni siquiera contenían signos de esperanza matemática (es decir, de valor esperado). Los alumnos resolvieron el apartado (b) razonablemente bien, aunque no hubo muchos que al final dieran con la expresión correcta para $\mathrm{E}(Y)$. Sorprendentemente, muy pocos alumnos se dieron cuenta de que los cálculos algebraicos podían resultar más fáciles utilizando la sustitución $t = y - \lambda$. . Fue decepcionante comprobar en (b)(i) que, a pesar de que la mayoría de alumnos se dieron cuenta de que $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{d}y$ tenía que ser igual a 1, muy pocos se dieron cuenta de que también tenían que mostrar que $f(y)$ tenía que ser no negativo dentro del rango apropiado.

**Pregunta 4**

Muchos alumnos resolvieron correctamente los apartados (a) y (b). Sin embargo, los apartados (c) y (d) les resultaron difíciles a la mayoría de los alumnos; de hecho, sólo hubo una minoría que siguió el camino más fácil de definir una función generatriz de probabilidad de la forma $\mathrm{E}(t^X)$, en lugar de $\sum p_x t^x$.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

A los alumnos habría que mostrarles todas las prestaciones incluidas en el menú de estadística de su calculadora. Los alumnos deberían estar familiarizados con las definiciones y las aplicaciones de las funciones generatrices de probabilidad.