# MATEMÁTICAS NS TZ2

(IB África, Europa y Oriente Medio y región Asia-Pacífico del IB)

## Bandas de calificación de la asignatura

### Matemática discreta

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 13 | 14 - 27 | 28 - 40 | 41 - 51 | 52 - 64 | 65 - 75 | 76 - 100 |

### Series y ecuaciones diferenciales

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 14 | 15 - 29 | 30 - 41 | 42 - 53 | 54 - 65 | 66 - 77 | 78 - 100 |

### Conjuntos, relaciones y grupos

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 14 | 15 - 29 | 30 - 41 | 42 - 53 | 54 - 65 | 66 - 76 | 77 - 100 |

### Estadística y probabilidad

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 13 | 14 - 27 | 28 - 39 | 40 - 51 | 52 - 63 | 64 - 75 | 76 - 100 |

## Variantes de los exámenes según la zona horaria

Para proteger la integridad de los exámenes, cada vez se están utilizando más variantes distintas de los exámenes según la zona horaria donde se realicen. Al recurrir a variantes del mismo examen, los alumnos ubicados en una parte del mundo no estarán respondiendo al mismo cuestionario de examen que los alumnos ubicados en otras partes del mundo. Se aplica un proceso muy riguroso para garantizar que las diversas variantes del examen sean comparables en lo que respecta a su dificultad y a la cobertura del programa de estudios, y se toman las medidas pertinentes para garantizar que se apliquen las mismas normas de calificación a todos los exámenes escritos de los alumnos, independientemente de cuál haya sido la versión del examen a la que hayan respondido. Para la convocatoria de exámenes de mayo de 2013 el IB ha elaborado variantes de los exámenes de Matemáticas NS para las distintas zonas horarias.

# Evaluación interna

## Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 6 | 7 - 13 | 14 - 18 | 19 - 23 | 24 - 29 | 30 - 34 | 35 - 40 |

# Ámbito y adecuación del trabajo entregado

En esta convocatoria hubo una gran cantidad de carpetas muy bien elaboradas y con pruebas sólidas de que el alumno había realizado una investigación matemática autodirigida. En general, en la presentación de los trabajos de los estudiantes se observaron buenas habilidades de expresión escrita. Sin embargo, se percibió un aumento en el número de documentos excesivamente largos, que contenían demasiadas capturas de pantalla repetitivas, así como hojas de cálculo sin anotaciones que se extendían a lo largo de varias páginas.

Parece que los profesores habían entendido bien los criterios de evaluación, pues con frecuencia elaboraron sus propias tablas de evaluación con instrucciones, con el fin de evaluar el trabajo de sus alumnos de manera sistemática y coherente. Las observaciones que realizó el equipo de moderadores se resumen a continuación.

**Las tareas:**

Casi todas las carpetas contenían tareas provenientes de la publicación «Tareas para ser utilizadas en 2012 y en 2013», siendo «Funciones sombra» y «Juegos de dados» las más populares. Algunos profesores parece que ignoraron los Informes Generales de la Asignatura correspondientes a las dos últimas convocatorias, puesto que la tarea «Patrones de números complejos» se incluyó en muchas muestras pero algunos alumnos (y profesores) volvieron a leer mal las instrucciones y presentaron una consecuencia conocida y trivial del teorema de de Moivre: que las raíces n-*ésimas* de la unidad, cuando se conectan entre sí de manera consecutiva en el plano complejo, forman un polígono regular. Se establecieron deducciones importantes a partir de dichas conclusiones. Por favor, tengan presente el consejo que se dio en los Informes Generales de la Asignatura correspondientes a mayo de 2012 y a noviembre de 2012.

Se entregaron muy pocas tareas que hubieran sido diseñadas por los profesores. Tal y como se observó en el anterior Informe General de la Asignatura, preocupa el uso continuado y reiterado de determinadas tareas diseñadas por los profesores. Tareas tales como «Lionel (el perro)», «Zigurats» y «Tuberías» se han reutilizado una y otra vez durante toda la última década. Las escuelas que sigan utilizando las mismas tareas año tras año (independientemente de que en teoría no tengan «fecha de caducidad») están ignorando el riesgo de plagio, puesto que las soluciones son fáciles de conseguir, no solo en Internet sino también a través de los antiguos alumnos de la asignatura.

# Desempeño de los alumnos con relación a cada criterio

Los alumnos obtuvieron en general una buena puntuación en el criterio A, a pesar de que siempre hubo algún alumno que utilizó notación de calculadora para la multiplicación o las exponenciales, o que no utilizó la notación de subíndices estándar, tal y como se requiere. Asimismo, al hablar de probabilidad no siempre se utilizó la notación correcta.

La mayoría de los alumnos presentaron trabajos muy bien escritos, con explicaciones minuciosas y detalladas. Sin embargo, todavía hubo algunos trabajos en los que faltaba la introducción o que contenían gráficos sin rotular. Algunos trabajos de los alumnos, a pesar de ser correctos, distaban mucho de ser concisos; concretamente, ¡hubo algunas carpetas cuya longitud superaba incluso la de las Monografías! Tal y como se señaló en el último Informe General de la Asignatura, los moderadores estaban abrumados y un tanto decepcionados por el excesivo número de páginas repetitivas que contenían gráficos parecidos, y por la inclusión de listas interminables de datos provenientes de hojas de cálculo.

El general, los alumnos presentaron buenos trabajos y los profesores han otorgado buenas puntuaciones a dichos trabajos en lo que respecta a los criterios C y D. Sin embargo, decepcionó comprobar que en algunos trabajos de tipo I la investigación realizada fue muy escasa, aportándose pocas pruebas de un patrón que permitiese justificar una conjetura, y mucho menos una generalización. Parece que algunos estudiantes empezaron con una noción previa del resultado final, sin haber llevado a cabo ninguna investigación.

Algunos alumnos, en la tarea de tipo II, no prestaron suficiente atención a los requisitos del criterio D, y dieron los resultados con un grado de precisión inapropiado, como en el ejercicio de las ganancias obtenidas en un juego de casino o el coste de la gasolina redondeando a seis lugares decimales.

El empleo de medios tecnológicos varió bastante de unos alumnos a otros. A menudo se concedió la máxima puntuación con demasiada generosidad, simplemente por haber incluido una amplia recopilación de gráficos similares. También conviene recordar que si en una tarea como la de los «Juegos de dados» se da por hecho que las probabilidades son únicamente valores positivos, en ese caso hay que ajustar los gráficos para que reflejen solamente dichos valores.

Se observó un buen aprovechamiento de los medios tecnológicos, en forma de gráficos con botones deslizantes que permiten ir ajustando los parámetros representados, y en el uso de enunciados condicionales en hojas de cálculo dinámicas. Algunos alumnos utilizaron software de representación gráfica (como GeoGebra, por ejemplo) para mostrar gráficos de números complejos.

Muchos de los trabajos presentados fueron buenos y completos; sin embargo, para la concesión de la máxima puntuación en el criterio F es necesario que el trabajo tenga un grado de sofisticación matemática que vaya más allá de la simple finalización de la tarea.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

Quizás se tendría que tratar la geometría de transformaciones antes de abordar una tarea como «Números Complejos», en la que el comprender que las distancias son invariantes bajo rotación habría simplificado enormemente la manera en la que los estudiantes abordan el análisis de dicha tarea.

Las sugerencias que aparecen a continuación se hicieron llegar ya a los profesores en el último Informe General de la Asignatura, pero quizá valga la pena mencionarlas de nuevo:

Los profesores tienen que escribir directamente en el trabajo presentado por el alumno, no solo para hacer llegar sus comentarios y opiniones al alumno, sino también para proporcionar información relevante a los moderadores. Se sugiere utilizar el Formulario B para que el profesor pueda anotar los comentarios más relevantes y descriptivos.

Ha habido una mejora evidente de la información de contexto correspondiente a las tareas de la carpeta que se han de adjuntar con cada muestra; en particular, mediante el uso del Formulario A o a través de comentarios anecdóticos. Esta información les resulta muy útil a los moderadores a la hora de confirmar los niveles de logro concedidos, pues les permite determinar el contexto en el que se situó cada tarea.

Cada carpeta debe ir acompañada de una hoja de soluciones con las respuestas a todas las tareas de las que consta la muestra, para que así los moderadores puedan justificar la precisión del trabajo y entender cuáles son las expectativas del profesor. En aquellos casos en los que hay más de un profesor de NS encargado de puntuar el trabajo de la carpeta, el uso de un esquema de calificación común ha resultado eficaz.

# Prueba 1

### Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 16 | 17 - 33 | 34 - 49 | 50 - 62 | 63 - 74 | 75 - 87 | 88 - 120 |

## Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Muchos alumnos no fueron capaces de dar un razonamiento convincente que permitiera enlazar las sucesivas manipulaciones algebraicas. Con frecuencia parecía que se esperaba que los examinadores fueran capaces de leer la mente o de adivinar las intenciones del alumno.

A muchos alumnos se les atragantaron las preguntas en las que había que utilizar números complejos.

La mayoría de los alumnos fueron incapaces de descomponer en factores (monomios) un polinomio de grado 3, incluso en aquellos casos en los que la correspondiente ecuación tenía una solución «obvia».

Cuando en una pregunta se les pide que muestren una respuesta, algunos alumnos parecen no darse cuenta de que el desarrollo del ejercicio hasta la obtención de dicha respuesta ha de ser convincente.

## Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Manipulación de vectores y matrices; análisis básico; diagramas de árbol y probabilidad; hallar la inversa de una función; aplicación del teorema del binomio.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

### Pregunta 1

Bien resuelta, en general, aunque bastantes alumnos o no fueron capaces de integrar el término del seno o evaluaron incorrectamente el coseno resultante en los límites de integración.

**Pregunta 2**

Muy bien resuelta. Sin embargo, hubo unos pocos alumnos que perdieron uno o dos puntos por culpa de errores aritméticos cometidos al calcular el producto de matrices.

**Pregunta 3**

Bien resuelta, en general. La mayoría de los alumnos obtuvieron una función de quinto grado (quíntica) con los signos alternos correctos. Sólo hubo unos pocos alumnos que cometieran errores aritméticos. Un pequeño número de alumnos multiplicaron la expresión lineal, y la mayoría de ellos lo hicieron correctamente.

**Pregunta 4**

Bien resuelta, en general. Hubo unos pocos alumnos que no tuvieron en cuenta el hecho de que Caz se había comido el chocolate, por lo que no lo repusieron. Sólo unos pocos alumnos cometieron errores en el cálculo de la probabilidad.

**Pregunta 5**

La mayoría de los alumnos lograron una buena puntuación en esta pregunta. Por lo general, los alumnos aplicaron correctamente la regla del producto y la regla del cociente, pero unos pocos cometieron un error al derivar el denominador, y obtuvieron $-\operatorname{sen} x$ en vez de $1-\operatorname{sen} x$.Un número de alumnos decepcionantemente elevado no supo calcular correctamente la pendiente en el punto especificado.

**Pregunta 6**

Casi todos los alumnos supieron obtener la ecuación cubica que satisface la razón común de la primera progresión, pero solo unos pocos fueron capaces de hallar las raíces de dicha ecuación. Una de las raíces era $r=1$.

**Pregunta 7**

(a) Fue decepcionante comprobar que solo unos pocos alumnos dieron con el argumento correcto para el segundo número complejo, utilizando arctg(1) de manera mecánica pero sin reflexionar sobre la posición del número en el plano complejo. (b) La mayoría de los alumnos fueron capaces de encontrar el cuadrado correcto o su raíz cuadrada, pero pocos supieron cómo minimizarlo.

**Pregunta 8**

La mayoría de los alumnos estaban familiarizados con el concepto de derivación implícita y casi todos hallaron correctamente la función derivada. En el apartado (b), un número importante de alumnos no se dieron cuenta de que tenían que proporcionar el valor de $x$.

**Pregunta 9**

(a) En esta pregunta es crucial llevar a cabo un razonamiento cuidadosamente organizado. Es importante hacer constar que tanto el numerador como el denominador son positivos para $x>0$. Los alumnos obtuvieron mejores puntuaciones en el apartado (b) que en el apartado (a).

**Pregunta 10**

(a) En general, aquellos alumnos que utilizaron la fórmula de la suma para la tangente dieron con la respuesta correcta. (b) Algunos alumnos dieron como respuesta el valor de la tangente de un ángulo, en vez de hallar el ángulo propiamente dicho.

**Pregunta 11**

Muchos alumnos abordaron con seguridad esta pregunta multiapartado. Apartado (b)(i) - Como aquí se daba la respuesta, los alumnos tenían que demostrar detalladamente que en verdad sabían cómo calcular un producto vectorial; no bastaba con escribir simplemente un determinante 3×3 y, a continuación, la solución final. Apartado (d) - Hubo unos pocos alumnos que no cayeron en la cuenta de que la ecuación de una recta es realmente una ecuación, y no una expresión. En el apartado (e) un número importante de alumnos no se dieron cuenta de que podían utilizar el resultado obtenido en el apartado (d).

**Pregunta 12**

Apartado (a) - Bien resuelto, en general. En cuanto al apartado (b), la mayoría de los alumnos halló la derivada, pero muchos dieron por hecho que era positiva, obviamente. Apartado (d)(i) - Bien resuelto, en general, aunque algunos alumnos no rotularon la expresión final como $f^{-1}(x)$. En el apartado (d)(ii) hubo alumnos que perdieron puntos al no marcar los puntos de corte (intersecciones) e indicar las coordenadas de dichos puntos. Los alumnos también perdieron puntos en este apartado y en el apartado (e)(i) por dibujar gráficos que se extendían más allá del dominio que se había establecido explícitamente.

**Pregunta 13**

(a)(i) Un número decepcionantemente alto de alumnos fueron incapaces de hallar correctamente los argumentos de los tres números complejos. Dichos errores hicieron mella en su esfuerzo para abordar los apartados (ii) y (iii), al partir de datos incorrectos. (b) Muchos alumnos resolvieron correctamente el apartado (i), pero no lograron sacar partido de ello; en particular, muy pocos aprovecharon el hecho de que las raíces de $z^7 - 1 = 0$ son parejas de números complejos conjugados.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

Alentar a los alumnos a que respalden y sustenten el desarrollo puramente algebraico con comentarios y razonamientos.

Hacer más hincapié en la representación geométrica de números complejos en el plano complejo (plano de Argand).

## Otros comentarios

Este examen resultó ser muy asequible, y la mayoría de los alumnos parecieron estar bien preparados para abordar los aspectos puramente algebraicos de las preguntas. Sin embargo, en la parte de razonamiento tuvieron muchas más dificultades.

# Prueba 2

## Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 13 | 14 - 27 | 28 - 39 | 40 - 54 | 55 - 69 | 70 - 84 | 85 - 120 |

## Comentarios generales

La prueba parece que resultó accesible y que tenía la longitud adecuada. La mayoría de los alumnos demostraron tener un buen conocimiento del material de la asignatura y la capacidad de aplicar dichos conocimientos para responder a las preguntas del examen.

## Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Preguntas de examen que requirieran el uso de la calculadora de pantalla gráfica, aplicar las propiedades de la distribución normal, integración por sustitución, el análisis de una expresión donde la variable independiente sea discreta, resolución de ecuaciones trigonométricas en un intervalo finito, dibujar aproximadamente una función densidad de probabilidad que sea continua, demostración mediante inducción matemática, probabilidad condicionada, resolución de ecuaciones diferenciales en el contexto de la cinemática, representar una suma utilizando notación de sumatoria, verificar una solución concreta de una ecuación diferencial, hallar la solución general de una ecuación diferencial, determinar el recorrido de una función, formular y derivar expresiones que contengan funciones trigonométricas inversas, dibujar gráficos de manera aproximada pero a la vez precisa y aplicar la regla de la cadena a los tipos de cambio.

## Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Calcular el área de un sector circular y de un triángulo, utilizar la calculadora de pantalla gráfica para resolver un sistema de ecuaciones lineales, la integración por partes, progresiones y series tanto aritméticas como geométricas, aplicaciones sencillas de las distribuciones binomial y de Poisson, el uso de integrales definidas para calcular áreas y volúmenes y el uso de la primera derivada en un problema de optimización.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

### Pregunta 1

Esta pregunta en general la respondieron satisfactoriamente. En el apartado (a), algunos alumnos expresaron el ángulo requerido bien en grados o en radianes pero con un número incorrecto de cifras significativas. En el apartado (b), algunos alumnos aplicaron un método correcto para calcular el área de la región sombreada, pero utilizaron luego una fórmula incorrecta para el área de un sector circular.

**Pregunta 2**

Esta pregunta en general la respondieron satisfactoriamente. En el apartado (a), algunos alumnos expresaron el sistema de ecuaciones de la forma $XA = B$. En el apartado (b), la inmensa mayoría de alumnos que utilizaron un enfoque directo mediante calculadora de pantalla gráfica hallaron la solución correcta. Aquellos alumnos que apostaron por métodos matriciales (como la reducción por filas) sin hacer uso de la calculadora de pantalla gráfica, en general no lograron dar con la solución correcta.

**Pregunta 3**

Un gran porcentaje de alumnos tuvieron dificultades con esta pregunta. En los apartados (a) y (b), el error más habitual fue utilizar $\sigma = 9{,}5$. En el apartado (a), muchos alumnos utilizaron su rango de valores para luego hallar, sin que fuera necesario, la correspondiente probabilidad de que sucediera en ese intervalo temporal. En el apartado (b), muchos alumnos utilizaron un límite inferior poco realista (un valor grande y negativo) para el tiempo.

**Pregunta 4**

En el apartado (a), hubo un gran número de alumnos que fueron capaces de utilizar correctamente la integración por partes, pero que luego se mostraron incapaces de usar la integración por sustitución para así hallar la integral indefinida de tg $x$. En el apartado (b), muchos alumnos trataron de resolver la ecuación sin utilizar directamente el comando de «resolución numérica» que tienen las calculadoras de pantalla gráfica. Algunos alumnos presentaron más de una solución para $m$ y algunos dieron el valor de $m$ redondeando a dos cifras significativas únicamente.

**Pregunta 5**

En el apartado (a), la mayoría de los alumnos fueron capaces de expresar $u_n$ y $v_n$ acertadamente y, a partir de lo anterior, obtuvieron una expresión correcta para $u_n - v_n$. Algunos alumnos cometieron errores de álgebra por descuido al simplificar innecesariamente $u_n$, mientras que otros se equivocaron al afirmar que $v_n$ era igual a $3(1{,}2)^n$. En los apartados (b) y (c) la mayoría de los alumnos trataron a $n$ como si fuera una variable continua, en vez de discreta. Los alumnos deberían tomar conciencia de que la función «Tabla» de las calculadoras de pantalla gráfica resulta de gran utilidad en este tipo de preguntas. En el apartado (c) hubo algunos alumnos que trataron de hallar el valor máximo de $n$ (en vez de intentar hallar el valor máximo de $u_n - v_n$).

**Pregunta 6**

Los alumnos resolvieron el apartado (a) bastante bien, en general. Algunos alumnos no siguieron las instrucciones y dieron la respuesta final redondeando al número entero de grados más próximo. Muchos alumnos optaron, con éxito, por un enfoque gráfico. En cuanto al apartado (b), los alumnos no lo resolvieron correctamente. Entre los errores más habituales estuvieron: el tratar de solucionar para $x$ (en vez de para *sec x*), el omitir o el no considerar $\sec x = -\sqrt{2}$, el no rechazar $\sec x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ y el no trabajar con valores exactos.

**Pregunta 7**

Los alumnos resolvieron el apartado (a) bastante bien, en general. Los errores más habituales normalmente tuvieron que ver con no darse cuenta de que la suma de las dos integrales era igual a uno, con redondear antes de tiempo o con no mostrar todo el desarrollo del ejercicio hasta llegar a la respuesta $a = 9{,}6$. El apartado (b) no lo resolvieron satisfactoriamente, con muchos gráficos mal rotulados y sin indicar ni el dominio ni el recorrido de la función. En cuanto al apartado (c), los alumnos lo resolvieron razonablemente bien. El error más habitual fue calcular una probabilidad errónea al haber partido de una integral definida incorrecta.

**Pregunta 8**

Esta demostración por inducción matemática les supuso todo un desafío a la mayoría de alumnos. Mientras que la mayoría de los alumnos fueron capaces de mostrar que $P(1) = 0$, un número importante de ellos no indicaron que cero es divisible por 576. Unos pocos alumnos empezaron la demostración calculando P(2). Resultó grato comprobar que la mayoría de los alumnos habían resuelto el paso de inducción razonablemente bien. Sin embargo, hubo muchos alumnos que cometieron errores algebraicos simples. El error más frecuente fue decir que $5^{2(k+1)} = 5(5)^{2k}$. En el enunciado final a menudo se omitió el enunciado de implicación requerido; asimismo, con frecuencia se omitió el hecho de haber averiguado que P(1) es verdadera.

**Pregunta 9**

En general, los alumnos resolvieron bien el apartado (a), aunque algunos alumnos sumaron las dos probabilidades en vez de multiplicarlas. Además, algunos alumnos dieron la probabilidad que se les pedía, pero redondeando únicamente a dos cifras significativas. El apartado (b) supuso un desafío para la mayoría de alumnos; de hecho, solo unos pocos fueron capaces de emplear un argumento basado en la probabilidad condicionada.

**Pregunta 10**

La mayoría de los alumnos tuvieron dificultades con esta pregunta. Hubo muchos alumnos que no intentaron separar las variables y, en vez de eso, o bien trataron de integrar con respecto a $v$ o bien utilizaron las fórmulas de la aceleración constante. Aquellos alumnos que sí optaron por separar las variables y trataron de integrar ambos lados, o bien cometieron un error de signo, u omitieron la constante de integración u obtuvieron un valor incorrecto para esta constante. Casi ningún alumno tomó conciencia de que esta pregunta se podía resolver fácilmente con la calculadora de pantalla gráfica.

**Pregunta 11**

En el apartado (a) (i), hubo muchos alumnos que no fueron capaces de utilizar correctamente la notación de sumatoria para expresar la suma de los $n$ primeros números enteros positivos e impares. Entre los errores más habituales estaban: sumar $2n - 1$ desde 1 hasta $n$, y escribir sumas cuyos límites eran incorrectos. Los alumnos resolvieron los apartados (a) (ii) y (iii) bastante bien, en general.

Asimismo, los alumnos resolvieron los apartados (b) (i) y (iii) bastante bien, en general. En el apartado (b) (iii), muchos alumnos simplificaron innecesariamente la función cuadrática, cuando podían haber utilizado directamente la calculadora de pantalla gráfica. Unos pocos alumnos dieron como respuesta final $n > 1416$. Mientras que algunos alumnos hicieron gala de un sólido razonamiento en el apartado (b) (ii), muchos otros, lamentablemente, adoptaron un enfoque de «demostración mediante ejemplo».

Los alumnos resolvieron el apartado (c) bastante bien, en general. En el apartado (c) (ii) algunos alumnos multiplicaron las dos probabilidades (en vez de sumarlas).

**Pregunta 12**

Los alumnos no hicieron bien el apartado (a) y con frecuencia resultó difícil de puntuar. En el apartado (a) (i), muchos alumnos no sabían cómo verificar una solución ($y(x)$) de una ecuación diferencial dada. En su lugar, muchos alumnos trataron de resolver la ecuación diferencial. En el apartado (a) (ii), un gran número de alumnos empezaron a resolver la ecuación diferencial separando correctamente las variable pero luego, o bien no añadieron una constante de integración, o añadieron una como una idea de último momento. Se detectaron muchos errores algebraicos simples y muchos errores de cálculo integral básico. En el apartado (a) (iii), muchos alumnos no se percataron de que había que igualar la solución obtenida en el apartado (a) (i) y la solución general hallada en el apartado (a) (ii). Aquellos alumnos que sí sabían que había que igualar esas dos soluciones fueron capaces de elevar al cuadrado ambas soluciones y utilizar correctamente la identidad trigonométrica sen $2x = 2$ sen $x$ cos $x$. No obstante, muchos de estos alumnos empezaron este apartado partiendo de soluciones incorrectas.

En el apartado (b), muchos alumnos supieron hallar el área requerida y el volumen del sólido de revolución utilizando el cálculo integral. Sin embargo, muchos alumnos utilizaron expresiones incorrectas obtenidas en el apartado (a). En el apartado (b) (ii), algunos alumnos o bien olvidaron escribir «π» o bien trataron de calcular el volumen de un sólido de revolución de «radio» $f(x) - g(x)$.

**Pregunta 13**

Los alumnos resolvieron el apartado (a) razonablemente bien. Mientras que muchos alumnos hicieron gala de sólidos conocimientos de trigonometría para expresar correctamente $\theta$ en función de $x$, hubo muchos otros alumnos que no fueron capaces de utilizar la trigonometría más elemental para formular la expresión de $\theta$ que les pedía el enunciado. En el apartado (b), hubo muchos alumnos que no se dieron cuenta de que $\theta$ solo podía ser agudo, y por ello dieron también como posibles valores de $\theta$ ángulos obtusos. Muchos alumnos también demostraron una notable falta de perspicacia a la hora de sustituir en la expresión de $\theta$ las abscisas (coordenadas $x$) de los extremos. En el apartado (c) muchos alumnos esbozaron gráficos poco precisos o que no resultaban plausibles. En el apartado (d) hubo muchos alumnos que empezaron a calcular la derivada incorrectamente, al no aplicar bien la regla de la cadena. Para ser un apartado de una pregunta situada justo al final del examen, los alumnos resolvieron el apartado (e) razonablemente bien. Muchos alumnos demostraron tener unos sólidos conocimientos a la hora de hallar en qué punto $\theta$ alcanzaba un valor máximo, y rechazaron las soluciones que no fueran físicamente factibles. En el apartado (f) muchos alumnos fueron capaces de vincular los tipos apropiados. Sin embargo, solo unos pocos fueron capaces de aplicar correctamente la regla de la cadena en un contexto de tipos similar y relacionado con el anterior.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

- Promover una mayor toma de conciencia sobre la importancia que tienen las destrezas básicas en el bosquejo de gráficos, incluyendo un cuidadoso análisis del dominio, el recorrido y las características más importantes del gráfico.

- Promover una mayor toma de conciencia sobre la necesidad de sustentar las respuestas con bosquejos precisos y/o con la descripción del método utilizado, incluso en aquellos casos en los que las respuestas se puedan obtener con la calculadora de pantalla gráfica.

- Alentar a los alumnos a que utilicen la calculadora de pantalla gráfica (CPG) para resolver ecuaciones y para integrar numéricamente; proporcionar a los alumnos un abanico amplio de problemas que les permitan explorar funciones más avanzadas de la CPG, incluida la función «Tabla» que con la que cuentan las CPG.

- Alentar a los alumnos a almacenar las respuestas numéricas obtenidas con la calculadora de pantalla gráfica o mostrarles cómo se puede ir pasando por los distintos pasos de los que consta el ejercicio utilizando un número suficiente de cifras significativas, de modo que la respuesta final sea la correcta y tenga el grado de precisión apropiado.

- Hacer hincapié en cómo se han de responder de manera convincente las preguntas de examen del tipo «Muestre que..» y dar muchos ejemplos de demostraciones matemáticas.

- Aclarar el significado de todos y cada uno de los términos de examen que aparecen en la guía de Matemáticas NS.

- Facilitar a los alumnos un abanico amplio de preguntas de probabilidad, dotándoles de contexto, y explicar en detalle la definición de «función densidad de probabilidad continua».

- Aumentar la toma de conciencia por parte de los alumnos sobre qué constituye un enunciado final correcto en una demostración por inducción matemática.

- Proporcionar a los alumnos muchos ejemplos de preguntas de examen de convocatorias anteriores, y enseñarles formas eficientes de responder a estas preguntas de examen. Asimismo, realizar a modo de práctica ejercicios con un tiempo limitado, para que así los alumnos mejoren su eficiencia a la hora de hacer exámenes.

# Prueba 3 - Matemática discreta

### Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 8 | 9 - 17 | 18 - 27 | 28 - 33 | 34 - 40 | 41 - 46 | 47 - 60 |

## Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Los alumnos no estaban tan contentos cuando tenían que reflexionar y que crear demostraciones por ellos mismos (p. ej., en la pregunta 5) como cuando tenían que aplicar algoritmos conocidos. Por lo que se pudo ver en la pregunta 3, por ejemplo, parece que no habían practicado mucho las operaciones en bases distintas.

## Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

En general los alumnos sabían cómo se han de aplicar los algoritmos. El nivel promedio de los alumnos fue bastante grato.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

### Pregunta 1

Los alumnos resolvieron bien el apartado (a) y bastante bien el apartado (b). Surgieron algunos problemas con los signos negativos, por el hecho de que había un valor negativo en la pregunta. Esto obligaba a los alumnos a reflexionar un poco; no les valía con recordar de memoria las fórmulas y aplicarlas sin pensar. Se recomienda a los profesores que utilicen el diseño del algoritmo que va siguiendo el hilo de las combinaciones lineales de las 2 primeras variables. Los alumnos resolvieron el apartado (c) razonablemente bien; de hecho, no todos utilizaron la pista. Sin embargo, algunos alumnos no leyeron el enunciado con el suficiente detenimiento como para captar que tenían que hallar el valor más pequeño.

### Pregunta 2

En el apartado (a) se vio que, en general, los alumnos conocían bien los criterios que han de cumplir los circuitos y senderos eulerianos; de hecho, la mayoría de los alumnos se dieron cuenta de que tenían que empezar/acabar en G/E. Aquellos alumnos que no lograron resolver el apartado (a), en general tuvieron también muchas dificultades para contestar al resto del examen. En lo que respecta al apartado (b), el trazado varió mucho de un alumno a otro. No todos los alumnos explicaron con claridad el método utilizado y algunos no mostraron los rótulos temporales. Es recomendable que los profesores planteen y apliquen el método tabular con el sistema de «prueba y marcha atrás», dado que constituye una forma eficaz de abordar este tipo de problemas y tiene un diseño muy claro.

**Pregunta 3**

El apartado (a) fue un buen indicador de la destreza global del alumno. Muchos alumnos no escribieron ambos lados de la ecuación en función de $n$ y, por consiguiente, acabaron teniendo una ecuación imposible de resolver, lo que debería haberles llevado a pensar que habían cometido un error. Los alumnos, en general, no resolvieron bien el apartado (b), y de entre aquellos que sí lo hicieron, algunos solo escribieron un lado de la ecuación en base 7. Dado que el enunciado de la pregunta contenía las respuestas a los apartados (a) y (b), el alumno podía comprobar si había hecho o no correctamente el ejercicio.

**Pregunta 4**

La mayoría de los alumnos conocían el método que había que aplicar en el apartado (a), aunque unos pocos lo desconocían. Los alumnos resolvieron el apartado (b) razonablemente bien, empleando para ello métodos diversos. En el apartado (c) las respuestas dadas fueron buenas, en general, aunque algunos alumnos en (ii) creyeron que para que hubiera isomorfismo bastaba con que la secuencia de grados fuera la misma. El apartado (d) resultó ser un buen indicador de la capacidad global del alumno; algunos alumnos buenos aportaron una demostración lógica, mientras que hubo alumnos peores que proporcionaron un único ejemplo.

**Pregunta 5**

Sólo los mejores alumnos fueron capaces de presentar demostraciones lógicas y bien elaboradas. Hubo demasiados alumnos a los que les costó enormemente trabajar con la notación de sumatoria y que no fueron capaces de aplicar el pequeño teorema de Fermat. La lógica empleada fue deficiente (p. ej., analizar un ejemplo concreto) y el álgebra utilizada fue también deficiente. Me hicieron mucha gracia los intentos de elaborar una demostración mediante inducción empezando por el primo $p=1$ y pasando luego del primo $k$ al primo $k+1$!

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

A pesar de que esta opción incluía gráficos y árboles, ¡no era necesario que los alumnos utilizaran papel milimetrado en algunas de las preguntas! Resultó más difícil leer las respuestas de aquellos alumnos que sí lo utilizaron, ya que los exámenes se escanean antes de ser enviados. Si un alumno introduce una variable que no se daba en el enunciado de la pregunta, en ese caso tiene que explicar qué representa dicha variable para que así el examinador pueda seguir el desarrollo del ejercicio. Los alumnos tienen que estar preparados tanto para hacer demostraciones como para aplicar algoritmos, y han de saber que con explicaciones ostentosas pero que contienen mucha paja casi nunca se logran muchos puntos. A los alumnos les resultará útil observar en detalle cuál es la estructura de las demostraciones que aparecen en los esquema de calificación de los exámenes previos. Por ejemplo, está bien que recuerden que uno no puede empezar con aquello que está tratando de demostrar, o que los ejemplos no son demostraciones. Con muchos de los puntos mencionados anteriormente, un examen de prueba corregido con esmero y detenimiento debería haber servido de ayuda a los alumnos, si éstos estuviesen preparados para aprender. Es importante que la enseñanza impartida cubra todo el programa de estudios.

# Prueba 3 - Series y ecuaciones diferenciales

## Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 11 | 12 - 22 | 23 - 30 | 31 - 37 | 38 - 45 | 46 - 52 | 53 - 60 |

## Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

En este examen un número importante de alumnos tuvieron dificultades para aplicar correctamente el teorema de Taylor. Los alumnos también tuvieron problemas para sumar correctamente una serie alternada y dar la respuesta con un determinado grado de precisión. De modo similar, los alumnos no se sentían muy seguros de sí mismos a la hora de sumar una serie telescópica y de aplicar los métodos algebraicos necesarios para hallar la suma de una serie así.

## Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Una mayoría significativa de alumnos demostró conocer bien las condiciones y la técnica que se requiere para hallar un límite utilizando la regla de L'Hôpital. La mayoría de los alumnos también se mostraron seguros de sí mismos a la hora de resolver ecuaciones diferenciales utilizando el método de Euler, y muchos fueron capaces de resolver una ecuación diferencial utilizando un factor de integración. Muchos alumnos consiguieron hallar un radio de convergencia y verificar el intervalo de convergencia asociado. La mayoría de los alumnos fueron capaces de abordar y de avanzar en un problema que incluyera sumas de Riemann.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

### Pregunta 1

La mayoría de los alumnos obtuvieron la máxima puntuación en esta pregunta, pero todavía hubo una minoría nada despreciable de alumnos que no parecieron estar familiarizados con la aplicación de la serie de Taylor. Mientras que todos los alumnos que respondieron a esta pregunta eran conscientes de la necesidad de utilizar derivadas, muchos de ellos no emplearon correctamente factoriales para hallar los coeficientes necesarios. Cabe mencionar que la fórmula de la serie de Taylor aparece en el Cuadernillo de Información.

### Pregunta 2

La mayoría de los alumnos conocían el método de Euler y fueron capaces de aplicarlo a la ecuación diferencial del apartado (a). Algunos alumnos que conocían el método de Euler hicieron una iteración de más, llegando así a una respuesta incorrecta. Solo un número sorprendentemente bajo de alumnos fueron capaces de utilizar eficazmente la calculadora de pantalla gráfica para responder a esta pregunta, lo que hizo que muchas de las respuestas finales fueran incorrectas debido a errores de redondeo.

La mayoría de los alumnos fueron capaces de derivar correctamente el factor de integración del apartado (b), pero algunos de ellos perdieron puntos porque no mostraron todos los pasos que cabría esperar en una pregunta del tipo «Muestre que…». Un número importante de alumnos resolvió correctamente la ecuación diferencial. Sin embargo, se cometieron algunos errores, como el multiplicar por $\sec x$ antes de incluir la constante arbitraria.

**Pregunta 3**

Nos fue grato comprobar que la mayoría de los alumnos conocían los conceptos de radio de convergencia y de intervalo de convergencia que se necesitaban en los apartados (a) y (b) de este problema. Muchos alumnos aplicaron correctamente el criterio de D'Alembert para la convergencia, y también hubo un pequeño número de alumnos que utilizaron la prueba de la raíz n-*ésima* de Cauchy para resolver el apartado (a). Los alumnos, a la hora de hallar el intervalo de convergencia de una serie, no pueden olvidarse de justificar correctamente la divergencia o la convergencia de dicha serie. Un importante número de alumnos abordó la suma de la serie del apartado (c) de manera deficiente, lo que resultó sorprendente pues se esperaba que fuera un problema bastante sencillo. Nuevamente, el uso eficiente de la calculadora de pantalla gráfica parece que fue un problema para algunos alumnos. Algunos alumnos hallaron la suma correcta pero no con la precisión que se requería.

**Pregunta 4**

Casi todos los alumnos fueron capaces de hallar correctamente las fracciones simples que se requerían para el apartado (a). En el apartado (b), mientras que una mayoría de alumnos fueron capaces de reconocer la serie telescópica utilizando fracciones simples, muchos otros no fueron capaces de manipularlas para poder hallar correctamente la suma de los términos de la serie. No quedó claro si se debió a una falta de fluidez algebraica o a no estar lo suficientemente familiarizados con la serie telescópica. De entre aquellos alumnos que hallaron la suma, la mayoría de ellos fueron capaces de hallar también el límite cuando $n \to \infty$.

**Pregunta 5**

Muchos alumnos lograron desarrollar y avanzar en mayor o menor medida en este problema. Este hecho nos resultó muy grato, puesto que a pesar de ser un problema relativamente sencillo no se trataba de un problema estándar. Aun así, todavía hubo algunos alumnos que en los apartados (a) y (b) no utilizaron correctamente la integral definida para hallare el área bajo la curva. Asimismo, los alumnos no deben olvidar mostrar todo el desarrollo (cálculos, razonamiento) que se requiere en una pregunta de tipo «Muestre que…», incluso aunque tengan que demostrar resultados conocidos. En los apartados (a) (ii) y (b) (ii), muchos de los alumnos hallaron correctamente los límites superior e inferior.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

- Los alumnos necesitan saber utilizar la calculadora de pantalla gráfica correctamente para aplicar el método de Euler y la suma de los términos de una serie.

- Los alumnos tienen que tomar conciencia del grado de precisión que se pide en cada problema.

- Los alumnos tienen que aplicar el rigor necesario y el nivel de comunicación que se requiera cuando aborden un problema donde se pida al alumno que demuestre un enunciado o que muestre que es verdadero.

- Los alumnos tienen que tener conciencia de técnicas tales como el uso de fracciones simples para hallar una serie telescópica, y el uso eficiente de técnicas algebraicas para hallar la suma de los términos de dicha serie.

# Prueba 3 - Conjuntos, relaciones y grupos

## Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 11 | 12 - 23 | 24 - 31 | 32 - 37 | 38 - 43 | 44 - 49 | 50 - 60 |

## Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

En esta prueba los alumnos tuvieron dificultades para presentar demostraciones bien elaboradas. Por lo general se observó una falta de rigor, que quedó patente tanto en la terminología y la notación empleadas, que fueron bastante deficientes, como en las técnicas de demostración utilizadas. Con frecuencia los alumnos empezaron por aquello que estaban tratando de demostrar, y luego emplearon un razonamiento circular. Al referirse a las aplicaciones biyectivas, los alumnos a menudo se limitaron a escribir la definición de aplicación inyectiva y de aplicación biyectiva y no siguieron las instrucciones, donde se les pedía que hicieran referencia a la representación gráfica de la función.

## Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

Muchos alumnos demostraron a lo largo de todo el examen tener unos buenos conocimientos del programa de estudios, e hicieron un intento razonable de responder a todas las preguntas. En particular, los alumnos demostraron tener excelentes conocimientos de teoría de grupos, concretamente de las propiedades de las operaciones binarias, de cómo completar una tabla de Cayley y de cómo hallar el orden de los elementos.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

**Pregunta 1**

En lo que respecta a la propiedad conmutativa, algunos alumnos empezaron por establecer $a*b=b*a$. Para el elemento neutro algunos alumnos confundieron $e*a$ con $ea$, y escribieron $ea=a$. Otros encontraron una expresión para un elemento simétrico, pero luego omitieron mencionar que no pertenece al conjunto de números naturales o que no es único.

**Pregunta 2**

No hubo ningún problema reseñable con los apartados (a), (b) y (d), pero en el apartado (c) los alumnos con frecuencia olvidaron mencionar que el conjunto cumple la propiedad asociativa con respecto a la operación porque la multiplicación es asociativa. Asimismo, los alumnos a menudo olvidaron enumerar los simétricos de cada elemento, limitándose a indicar que el elemento neutro estaba presente en cada fila y en cada columna de la tabla de Cayley. La mayoría de los alumnos no respondieron correctamente al apartado (d) y muchos de ellos se limitaron a enumerar todos los subconjuntos de orden 2 y 3 y a catalogarlos como subgrupos.

**Pregunta 3**

La mayoría de los alumnos representaron correctamente el gráfico de la función definida a trozos. A pesar de que la mayoría de los alumnos sabían que es necesario establecer que la función es inyectiva y sobreyectiva para poder demostrar que es una aplicación biyectiva, muchos se limitaron a citar textualmente la definición de aplicación inyectiva o la de aplicación sobreyectiva y no hicieron referencia alguna al gráfico en su razonamiento. La mayoría de los alumnos hallaron la inversa de la primera parte de la función definida a trozos, pero a algunos se les atragantaron los cálculos algebraicos que se requerían para la segunda parte. A la hora de hallar la inversa de la parte cuadrática de la función, algunos alumnos omitieron el signo más-menos delante de la raíz cuadrada. Hubo otros que sí lo incluyeron pero que luego olvidaron eliminar el signo negativo, por lo que no obtuvieron tampoco el punto de razonamiento. La mayoría no indicaron el dominio correcto para ninguna de las dos partes de la función inversa.

**Pregunta 4**

Los alumnos conocían las propiedades de las relaciones de equivalencia pero en el caso de la propiedad transitiva no mostraron el desarrollo del ejercicio con el suficiente nivel de detalle. Otros no hicieron correctamente la parte de aritmética modular, e incluso otros omitieron el «mod(5)» en algún apartado o en todo el ejercicio.

**Pregunta 5**

Esta fue la pregunta que más dificultades planteó a los alumnos. En su conjunto, los alumnos mostraron una escasa capacidad para presentar una demostración formal. Algunos obtuvieron algunos puntos por la demostración del elemento neutro en la intersección y por el enunciado de que la propiedad asociativa se transmite desde el grupo. Sin embargo, la inmensa mayoría no obtuvieron ningún punto por la demostración de que la operación es cerrada o por los axiomas inversos.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

- Esta opción requiere un poco de trabajo preliminar sobre las características de la demostración matemática. Los profesores harían bien en dedicar algo de tiempo a los distintos tipos de demostraciones matemáticas (p. ej., la demostración por contradicción y la demostración directa).

- Sigue existiendo la necesidad de exponer a los alumnos a problemas que requieran un razonamiento matemático sofisticado y un buen nivel de comunicación. Los alumnos necesitan adquirir más práctica para lograr transmitir sus ideas y sus argumentos con mayor claridad y de un modo lógico y legible.

- En aquellos problemas que incluyen funciones inversas, es necesario recordar a los alumnos que tienen que hallar el dominio de la función inversa.

# Prueba 3 - Estadística y probabilidad

### Bandas de calificación del componente

| **Calificación final:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rango de puntuaciones:** | 0 - 8 | 9 - 16 | 17 - 24 | 25 - 31 | 32 - 38 | 39 - 45 | 46 - 60 |

## Áreas del programa y del examen que les resultaron difíciles a los alumnos

Resultó inquietante comprobar que en la Pregunta 1 hubo muchísimos alumnos que fueron incapaces de hallar una estimación sin sesgo de la varianza. Los alumnos de este nivel deberían saber ya que para hallar una estimación sin sesgo es necesario dividir por $(n-1)$ (y no por $n$). Muchos alumnos parecían no estar familiarizados con la función de distribución de probabilidad acumulada. Incluso aquellos que conocen la definición con frecuencia la escriben así: $F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$. El doble uso de la *x* es, por supuesto, un abuso de notación. Por ello, se les debería alentar a los alumnos a utilizar esta definición: $\int_a^x f(u)\mathrm{d}u$.

Muchos alumnos tampoco están familiarizados con el Teorema central del límite. Esto nos preocupa muchísimo puesto que comúnmente se considera que es el teorema más importante de Estadística, y los alumnos que han cogido la opción de Estadística deberían estar familiarizados con él. La falacia más habitual es decir que la distribución muestreada (en vez de la media muestral) tiende a la normalidad a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

## Áreas del programa y del examen en las que los alumnos demostraron estar bien preparados

La mayoría de los alumnos se muestran sumamente competentes en el uso de la calculadora para resolver problemas que requieran deducciones de tipo estadístico. Sin embargo, en algunos casos, sería aconsejable que explicaran con más detalle lo que están haciendo.

## Puntos fuertes y débiles de los alumnos al abordar las distintas preguntas

**Pregunta 1**

En el apartado (a), la mayoría de los alumnos estimaron la media correctamente, aunque luego muchos de ellos no lograron obtener una estimación sin sesgo de la varianza que fuera correcta. El error más habitual fue dividir $\Sigma x^2$ entre 20 (en vez de dividirlo entre 19). Para algunos alumnos este error no supuso un gran «coste» (en puntos) puesto que en (b) y en (c) seguimos su razonamiento con el valor de la varianza que habían hallado en (a). Sin embargo, dado que en (b) y en (c) se hacía una estimación de la varianza, se debería haber calculado el intervalo de confianza y realizado la prueba correspondiente utilizando la distribución t. Fue sumamente decepcionante constatar que muchos alumnos hallaron un intervalo Z y utilizaron una prueba de Z; por hacer esto no se les concedió ningún punto. Los alumnos deberían tomar conciencia de que tener que estimar la varianza es una señal que apunta claramente hacia la distribución t [de Student].

**Pregunta 2**

El error más habitual en (a) fue definir hipótesis que incluyeran la media muestral (igual a 2,3). Es importante que los alumnos se den cuenta de que hacer un test para la bondad del ajuste en una distribución de Poisson es distinto que hacer un test para la bondad del ajuste en una distribución de Poisson con una media especificada. De hecho, cada uno de estos tests se realizan con distintos grados de libertad. En (b) muchos alumnos incluyeron una celda «5» (en vez de incluir una celda «$\geq 5$»). En consecuencia, la suma de las frecuencias esperadas fue menor que la suma de las frecuencias observadas, lo que hizo que el test no fuera válido. Algunos candidatos no se dieron cuenta de que, dado que el parámetro se había estimado, el número de grados de libertad sería igual al número de celdas menos dos.

**Pregunta 3**

Muchos alumnos lograron resolver bien esta pregunta. El error más habitual fue tratar de utilizar una aproximación normal para hallar probabilidades aproximadas, en vez de usar la distribución de Poisson para hallar las probabilidades exactas. Algunos alumnos parecieron no estar familiarizados con la expresión «Probabilidad de cometer un error de Tipo II», lo que hizo que (b) (ii) les resultara inaccesible. Otro error bastante habitual fue creer que el complementario de $x \leq 25$ es $x \geq 25$.

**Pregunta 4**

En general, las soluciones dadas en (a)(i) fueron decepcionantes, lo que sugiere que muchos alumnos no están familiarizados con el concepto de «función de distribución de probabilidad acumulada». Muchos alumnos sabían que era algo que tenía que ver con la integral de la función densidad de probabilidad, pero algunos pensaron que se trataba de $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$, que luego evaluaron como 1, mientras que otros pensaron que se trataba simplemente de $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{(x^2 + x^3)}{10}$, lo cual, en general, no constituye un método válido. Sin embargo, la mayoría de los alumnos resolvieron (a)(ii) correctamente, casi siempre integrando la función densidad de probabilidad entre 1 y *m*. En (b)(i), el enunciado del teorema central del límite fue en muchos casos bastante espantoso. Con frecuencia, el término «media muestral» no se mencionó, y parece que un error muy extendido es creer que es la propia distribución (en vez de la media muestral) la que tiende a la normalidad a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Las soluciones dadas en (b)(ii) a menudo no fueron mucho más allá de hallar la media y la varianza de $X$. A la hora de calcular la varianza, algunos alumnos redondearon la media de1,5916666.. a 1.59, lo que hizo que el valor obtenido en el cálculo de la varianza fuera incorrecto. Es importante hacer notar que para calcular la varianza normalmente hay que restar dos números muy grandes pero muy parecidos, por lo que es obligatorio mantener el máximo grado de precisión.

**Pregunta 5**

Los alumnos, en general, resolvieron bien el apartado (a), a pesar de que algunos alumnos no fueron capaces de distinguir la distribución binomial de la distribución binomial negativa. En (b)(ii), la mayoría de los alumnos sabían lo que tenían que hacer, pero se cometieron bastantes errores algebraicos. Con frecuencia, los alumnos utilizaron el signo igual (en vez del signo de la desigualdad) pero este desliz se aceptó siempre y cuando acabaran obteniendo $x = 23{,}5$. Para estos alumnos, lo difícil fue elegir 23 o 24 como respuesta final, y hubo algunos que se decantaron por la opción incorrecta. Algunos alumnos no vieron la relevancia del resultado obtenido en (b)(ii) para hallar el valor más probable de $X$, y decidieron utilizar «otro método alternativo»; el más habitual fue crear una tabla de probabilidades y luego elegir el valor más alto.

## Recomendaciones y orientación para la enseñanza de futuros alumnos

Tal y como se indicó anteriormente, muchos alumnos parecían no estar familiarizados con conceptos que se consideran «conocimientos bastante básicos». Con el nuevo material sobre estimaciones que se ha incluido en el programa, los alumnos deberían tomar mayor conciencia de la necesidad de dividir entre $(n-1)$ (en vez de entre $n$) para hallar una estimación sin sesgo de la varianza. Por otro lado, se debería alentar a los alumnos a que, cuando utilizan la calculadora para resolver un problema, expliquen con más detalle cuáles han sido los métodos empleados. Así, aun si la respuesta final es incorrecta, siempre cabe la posibilidad de recibir puntos de método si el método empleado se ha indicado con claridad.