MATEMÁTICAS NS

Bandas de calificación de la asignatura

Estadística y probabilidad

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 14	15 - 29	30 - 42	43 - 54	55 - 67	68 - 79	80 - 100

Conjuntos, relaciones y grupos

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 14	15 - 28	29 - 40	41 - 52	53 - 65	66 - 77	78 - 100

Series y ecuaciones diferenciales

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 13	14 - 28	29 - 40	41 - 52	53 - 66	67 - 78	79 - 100

Matemática discreta

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 14	15 - 28	29 - 40	41 - 52	53 - 65	66 - 77	78 - 100

Evaluación interna

Bandas de calificación del componente

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 6	7 - 13	14 - 18	19 - 23	24 - 29	30 - 34	35 - 40

Se vieron muchas carpetas de excelente nivel en esta sesión. Tanto profesores como estudiantes parecen haber comprendido bien los objetivos de la evaluación. A continuación se resumen las observaciones realizadas por los moderadores:

Las tareas:

La mayoría de las tareas de las carpetas fueron tomadas del *Material de ayuda al profesor* para Matemáticas NS vigente y las tareas elegidas indudablemente resultaron muy familiares para muchos docentes. Unos cuantos colegios también presentaron varias tareas nuevas de excelente calidad. Animamos a los profesores a diseñar sus propias tareas, teniendo en cuenta la necesidad de que satisfagan plenamente todos los criterios.

Surgieron tres motivos de preocupación con relación a las tareas de la carpeta:

1. Corriendo el riesgo de provocar consecuencias funestas para sus alumnos, algunos profesores siguen utilizando las tareas tomadas del *Material de ayuda al profesor* correspondiente al programa anterior. Estas tareas no satisfacen plenamente los criterios de evaluación vigentes; consiguientemente, hubo estudiantes que perdieron una significativa cantidad de puntos, por motivos ajenos a ellos mismos. Salvo que se hubieran modificado adecuadamente, <u>estas tareas del programa anterior no deberían haberse utilizado</u>.

2. Utilizar las tareas nuevas para 2009 y 2010 no solo es prematuro, sino que deriva en una penalización de 10 puntos por haberlas incluido en esta sesión. Si bien fueron aislados, fue triste encontrarse con estos casos. Resulta imperioso que los profesores sean conscientes de las ramificaciones que conlleva el asignar tareas de manera indiscriminada a sus alumnos, y en particular, de la consecuencia que esto tiene para el alumno que debe sufrir la penalización.

3. Las tareas tomadas del *Material de apoyo al profesor* de Matemáticas NM no son de nivel adecuado para Matemáticas NS y no deberían ser utilizadas.

Rendimiento alcanzado por los alumnos en cada uno de los criterios

El desempeño de la mayoría de los estudiantes en lo que hace al criterio A fue bueno. Fue muy limitado el uso de notación de computadora; sin embargo, el uso inapropiado de “^”, “E09”, y cosas del estilo, sigue pasando desapercibido por algunos profesores.

Muchas muestras incluían trabajo que estaba bien escrito. En los casos en los que el trabajo del alumno comenzaba con una introducción a la tarea, y los pasos y resultados eran acompañados de comentarios, anotaciones y conclusiones, el trabajo resultaba fácil de leer y de seguir, y lograba una puntuación alta en el criterio B. Sin embargo, hubo algunos casos de estudiantes cuyos trabajos parecían inconexos y se limitaban a presentar una resolución de la tarea en formato de pregunta / respuesta. Las gráficas sin rotular y las tablas relegadas al apéndice van en detrimento de una presentación efectiva.

Los criterios C y D, conjuntamente, apuntan a evaluar el contenido matemático, y representan la mitad de los puntos otorgados a cada trabajo. En general, los alumnos han producido buenos trabajos y la evaluación por parte de sus profesores ha sido correcta. Sin embargo, en algunas tareas de tipo I, la insuficiente exploración y elaboración de patrones tornaba cuestionable la repentina formulación de una conjetura. Cuando existían varias proposiciones generales, la demostración de “la proposición general”, por oposición a la de “una proposición general”, es la que debía estar presente para justificar el otorgamiento de la puntuación máxima.

En las tareas de tipo II, las variables deben estar definidas explícitamente. Se espera que los alumnos demuestren alguna comprensión del significado de los resultados obtenidos en función del modelo, al compararlos con la situación real, y que hayan reflexionado sobre lo que han hallado. Los análisis de los datos deben ser cuantificados y si resultara apropiado aplicar un análisis de regresión, el alumno debe dar las razones para la elección que realice. El uso de programas de computadora que determinan automáticamente el "mejor" modelo de regresión deja poco librado a la interpretación del alumno; por lo tanto, no puede recibir un puntaje demasiado alto.

El uso de tecnología fue considerablemente variado. Se otorgó con demasiada generosidad la puntuación máxima al uso *apropiado* pero no necesariamente *aprovechado y completo* de tecnología, por ejemplo, por la inclusión de un diagrama de dispersión generado por una calculadora. Como comentó un moderador hace un tiempo: la tecnología debe usarse para algo más que simplemente "decorar" el trabajo. Se debería disuadir al alumno de incluir las secuencias de teclas utilizadas en la calculadora de pantalla gráfica—son totalmente innecesarias.

Hubo gran cantidad de buenos trabajos; sin embargo, el otorgamiento de la puntuación máxima en el criterio F requiere no solo la entrega de un trabajo completo y correcto sino también evidencia de sofisticación matemática.

Sugerencias y recomendaciones para la enseñanza de alumnos futuros

Por favor, tengan presente que las tareas presentadas en el *Material de ayuda al profesor* vigente no deberán utilizarse más a partir de la sesión de mayo de 2009; por consiguiente, no deberán utilizarse con los alumnos que iniciaron el programa de diploma en septiembre de 2007. El uso de las tareas del *Material de ayuda al profesor* vigente o del anterior será penalizado mediante la quita de 10 puntos a partir de la sesión de mayo de 2009. Pedimos por favor, que se remitan al documento *Tareas de la carpeta para utilizar en 2009 y 2010* para ver algunas sugerencias.

Los profesores deberían elegir tareas que provean a los alumnos de una variedad de actividades matemáticas adecuadas para el nivel superior. Las tareas tomadas directamente del *Material de ayuda al profesor* de Matemáticas NM no cumplen con los requerimientos del NS. Por favor, asegúrense de que los estudiantes no pierdan puntos como consecuencia de las elecciones desacertadas del profesor.

El docente que no está informado acerca de los cambios introducidos en los criterios de evaluación de la carpeta es generalmente el causante de una significativa pérdida de puntos durante el proceso de moderación. Esto es no solamente desastroso para el alumno sino también completamente injusto, y debe ser rectificado.

Se espera que los profesores escriban directamente sobre el trabajo de sus alumnos, no solo para brindarles a ellos una devolución acerca de su rendimiento sino también para proveer de información a los moderadores. Algunas muestras contenían muy pocos comentarios realizados por el profesor. La moderación se tornaba extremadamente difícil cuando no era posible determinar los fundamentos del profesor para otorgar determinada puntuación.

A la hora de confirmar el nivel de logro otorgado en cada criterio, a los moderadores les resulta muy útil contar con información referida al contexto en el que se desarrolló cada tarea de la carpeta. Cada muestra debe ir acompañada de esta información, ya sea en el Formulario A o a través de comentarios anecdóticos.

Si se presenta una tarea diseñada por el profesor, debe incluirse la resolución de la misma junto con las carpetas, para que los moderadores puedan justificar la precisión del trabajo y apreciar el nivel de sofisticación demostrado en el trabajo.

Nivel Superior Prueba 1

Bandas de calificación del componente

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 18	19 - 36	37 - 54	55 - 68	69 - 83	84 - 97	98 - 120

Áreas del programa y del examen que parecen haber resultado difíciles para los estudiantes

En esta prueba, muchos estudiantes tuvieron dificultades en la interpretación de las preguntas contextualizadas —la pregunta 9 y en menor medida la pregunta 13. Las preguntas que requieren un nivel considerable de razonamiento y técnicas de demostración siguen causando dificultades. La comprensión del tema de números complejos es, en el caso de muchos alumnos, floja.

Áreas del programa o del examen en que los estudiantes demostraron estar bien preparados

Hubo una alentadora respuesta general a la primera Prueba 1 sin calculadora, en la que la mayoría de los alumnos demostró tener buen conocimiento del programa y buen manejo de las expresiones algebraicas y de vectores.

Puntos fuertes y débiles de los estudiantes al abordar las distintas preguntas

Sección A

Pregunta 1

Esta pregunta en general fue bien resuelta, pero en el apartado (b) algunos estudiantes trataron de integrar.

Pregunta 2

La mayor parte de los alumnos respondió con éxito esta pregunta. La mayoría utilizó el teorema del divisor, pero algunos hallaron el tercer factor lineal aplicando división polinómica o un método de inspección.

Pregunta 3

Muchos estudiantes utilizaron mucho espacio para resolver esta pregunta, pero en general llegaron a buen puerto. Algunos alumnos aplicaron incorrectamente la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos. Se vio un método alternativo interesante, consistente en hallar el simétrico del lado AB en AD y aplicar luego el teorema del coseno para obtener el resultado pedido.

Pregunta 4

Esta pregunta en general fue bien resuelta; muy pocos estudiantes calcularon $f \circ g$ en lugar de $g \circ f$.

Pregunta 5

El apartado (a) en general fue bien resuelto: casi todos los candidatos se dieron cuenta de que se trataba de un caso de derivada implícita. Unos pocos no derivaron el segundo miembro de la relación. Un número sorprendente de alumnos cometió errores en el apartado (b), aun habiendo logrado la puntuación máxima en el primer apartado.

Pregunta 6

Esta pregunta fue resuelta razonablemente bien; fueron pocos los alumnos que no determinaron correctamente tanto la función u como la que correspondía a $\frac{dv}{dx}$. La principal fuente de pérdida de puntos fue la integración necesaria para obtener la función *v*. Algunos estudiantes utilizaron la fórmula del seno de un ángulo doble, con poco éxito.

Pregunta 7

Esta pregunta en general fue bien resuelta; algunos alumnos detectaron la posibilidad de utilizar el hecho de que los sucesos A y B eran independientes.

Pregunta 8

La respuesta de una buena cantidad de alumnos a esta pregunta fue decepcionante. En general la derivada fue hallada correctamente, pero luego en muchos casos se la igualaba a $-2x+c$ en lugar de igualarla al valor numérico correcto. Algunos estudiantes o bien no simplificaron $\arctan(1)$ para obtener $\frac{\pi}{4}$, o lo dieron como 45 o $\frac{\pi}{2}$.

Pregunta 9

Esta fue una pregunta contextualizada que resultó difícil para muchos estudiantes. Muchos parecieron no haber comprendido plenamente el significado de los detalles del diagrama. Algunos alumnos, sin motivo aparente, trataron de integrar.

Pregunta 10

Los estudiantes que optaron por utilizar la versión trigonométrica del teorema de Pitágoras en general lo hicieron bien, aunque hubo una minoría cuyo razonamiento no fue del todo convincente. Algunos alumnos trabajaron con los vectores expresados en función de sus componentes, pero con frecuencia parecían perder de vista lo que estaban tratando de demostrar. Algunos alumnos trabajaron con vectores en el plano o con vectores específicos en lugar de generales.

Sección B

Pregunta 11

La mayoría de los estudiantes logró una puntuación razonablemente alta en esta pregunta. Los errores más comunes fueron: utilizar ***OB*** en lugar de ***AB*** en el apartado (a); no incluir el $r =$ en el apartado (b); no verificar que el valor de los dos parámetros satisficieran la tercera ecuación en el apartado (c); utilizar un vector incorrecto en el apartado (d). Aun en los casos en los que el apartado (d) fue bien resuelto, en general había poca evidencia de por qué se había trabajado con determinado vector.

Pregunta 12

El apartado (a) fue correctamente resuelto por la mayoría de los estudiantes, aunque algunos llegaron a $r = -3$. El apartado (b) fue abordado bien, en general, pero unos cuantos alumnos no supieron encarar satisfactoriamente el paso correspondiente a $n = k + 1$. Unos cuantos omitieron la afirmación `P(1) es verdadero´ en el cierre de la demostración.

Pregunta 13

La mayoría de los alumnos logró buena puntuación en esta pregunta. La pregunta evaluaba su competencia en la operatoria algebraica y en el cálculo de derivadas. Algunos estudiantes no pudieron extraer del contexto la relación correcta entre velocidad, distancia y tiempo.

Pregunta 14

Los apartados (a) y (b) en general fueron bien resueltos, aunque en el apartado (b) muy pocos indicaron que $w \neq 1$. El apartado (c), el último de la prueba, resultó un desafío. Los estudiantes que lograron algunos puntos se focalizaron, atinadamente, en la parte real de la identidad y se dieron cuenta de que había distintos cosenos que estaban relacionados.

Recomendaciones y orientaciones para la enseñanza de futuros estudiantes

- Se debería instar a los alumnos a prestarle atención a la importancia de estructurar sus respuestas sobre la base de una lógica correcta. Esto es particularmente pertinente a las demostraciones por inducción matemática.
- Los profesores deberían resaltar la importancia de dibujar diagramas en las preguntas de vectores, particularmente las que involucran rectas y planos.
- Los profesores deberían resaltar la importancia de leer detenidamente la pregunta, especialmente cuando el contexto de la misma no resulta familiar.
- Dado que con frecuencia se plantean preguntas en las que se pide una respuesta exacta, y se espera que sea simplificada, los profesores deberían asegurarse de que los alumnos tengan un sólido manejo de las operaciones con raíces, y de la relación

entre logaritmos y exponenciales y entre las funciones trigonométricas y sus inversas.

Nivel Superior Prueba 2

Bandas de calificación del componente

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 16	17 - 33	34 - 46	47 - 60	61 - 75	76 - 89	90 - 120

Generalidades

Esta fue la primera sesión de exámenes en la que los estudiantes rindieron la Prueba 1 sin calculadora y la Prueba 2 con calculadora. En la Prueba 2, varios examinadores comentaron acerca de la cantidad de muy buenos exámenes que habían corregido, lo cual es gratificante. Los exámenes de los estudiantes dan pruebas de que una mayoría significativa hizo buen uso del tiempo disponible y llegó a presentar un razonable intento por resolver la mayor parte de la prueba. Sin embargo, quedó claro que un porcentaje significativo de los alumnos tuvo dificultades a la hora de determinar cuándo resultaba apropiado el uso de la calculadora y cuándo era preciso aplicar un método analítico (para más detalle, remitirse a las recomendaciones y orientaciones para la enseñanza de futuros estudiantes).

Se considera que en las preguntas 3, 5, 7(b), 10, 11 y 13(a) resultaba necesario recurrir al uso de la calculadora. Las preguntas 2, 4 y 6 eran preguntas en las que la calculadora aumenta la cantidad de métodos plausibles que podían aplicar los alumnos. Las preguntas 1, 8, 9, 12 y 13(b) eran preguntas en las que el uso de la calculadora resultaba innecesario y/o inadecuado.

En el futuro, habrá que recordarles a los alumnos que las soluciones obtenidas a partir de la calculadora deben ir acompañadas de un desarrollo matemático apropiado, por ejemplo, de un método numérico o un método algebraico adecuado. No alcanza con que el alumno presente la frase genérica “obtenido en la calculadora” a modo de fundamentación de su respuesta. También es importante, al utilizar la calculadora, que los estudiantes hayan tenido mucha práctica en configurar pantallas de visualización adecuadas para la búsqueda de las coordenadas de puntos de intersección de dos funciones.

Un porcentaje significativo de alumnos perdió un punto por no expresar las respuestas numéricas con una aproximación de tres cifras significativas cuando correspondía hacerlo. De hecho, un número importante de alumnos se puede considerar afortunado de que esta penalización por aproximaciones erróneas se limite a un solo punto. Es importante que los alumnos comprendan la instrucción de que salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deben ser exactas o estar aproximadas con tres cifras significativas.

Los profesores deben seguir poniendo de relieve la estructura y el lenguaje correctos para el desarrollo de las demostraciones por inducción matemática. Un número importante de alumnos pareció no haber entendido, o ignoró por completo, frases clave tales como `a partir de lo anterior´ o `compruebe que´.

Para el proceso de enseñanza y aprendizaje futuro, es importante que tanto profesores como alumnos se den cuenta de que no todas las preguntas de la Prueba 2 requerirán el uso de la calculadora.

Áreas del programa y del examen que parecen haber resultado difíciles para los estudiantes

En la pregunta 13 la mayoría de los estudiantes no se percató, según parece, de que había que aplicar el método de separación de variables para plantear las ecuaciones diferenciales que describían el movimiento de una partícula. Un porcentaje significativo de alumnos no pudo evaluar la integral definida determinada por la separación de variables. La mayoría de los alumnos pareció no reconocer formas alternativas para la aceleración tales como $\frac{dv}{dt}$ o $v\frac{dv}{dx}$.

Otros motivos de preocupación incluyen dificultades en la resolución de una inecuación trigonométrica, en el reconocimiento del caso ambiguo en la aplicación del teorema del seno, en diferenciar entre la media, la mediana y la moda de una función de densidad de probabilidad continua, en hallar y justificar la existencia de un punto de inflexión de una función con dominio restringido, en resolver ecuaciones numéricamente (incluyendo el uso de tablas de valores) y gráficamente, en dibujar aproximadamente e identificar las características esenciales de la recíproca de una función a partir de la gráfica de una función no especificada, en el uso de las propiedades y del álgebra de los números complejos para demostrar un resultado dado, en la determinación de inecuaciones correctas en una distribución de Poisson, en el planteo correcto de una demostración por inducción y en el manejo de diferenciales, tanto en el método de separación de variables como en la inversión.

En general, y como era de esperar también, los apartados que requerían un razonamiento matemático más sofisticado o un manejo algebraico más exigente, resultaron un desafío para la mayoría de los alumnos.

Áreas del programa o del examen en que los estudiantes demostraron estar bien preparados

Los estudiantes a los que les fue bien, en general demostraron excelente habilidad algebraica, juicio crítico en el uso de la calculadora y un sólido razonamiento conceptual. Estos atributos quedaron evidenciados en el cálculo de probabilidades, en la exploración de algunas propiedades de las matrices y en el planteo y la resolución de ecuaciones (incluyendo ecuaciones diferenciales) por medio de una variedad de técnicas numéricas y analíticas. Las preguntas que le pedían al alumno plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales en general fueron muy bien resueltas.

Puntos fuertes y débiles de los estudiantes al abordar las distintas preguntas

Pregunta 1

Esta fue una pregunta fácil que fue bien resuelta por la mayoría de los estudiantes. Algunos alumnos no lograron la puntuación máxima debido a errores aritméticos producto del descuido. Fueron pocos los estudiantes que se dieron cuenta de que el apartado (b) podía resolverse correctamente restándole 3 a la respuesta del apartado (a). La mayoría de las respuestas correctas se obtuvo volviendo a realizar el cálculo del apartado (a).

Pregunta 2

Esta pregunta no fue tan bien resuelta como se esperaba; la mayoría de las respuestas correctas se obtuvo por un método gráfico. Algunos estudiantes confundieron t y h, y en consecuencia dieron los valores de t para los cuales la profundidad del agua llegaba al valor mínimo o al máximo. Algunos alumnos simplemente dieron las coordenadas del máximo y del mínimo, sin indicar las profundidades máxima y mínima.

En el apartado (b), un importante número de estudiantes omitió el valor $t = 24$ en su respuesta final. Unos cuantos alumnos tuvieron dificultades en la resolución de la inecuación por métodos algebraicos. Unos cuantos alumnos dieron intervalos incorrectos o solamente un intervalo correcto.

Pregunta 3

Esta pregunta en general fue bien resuelta. En el apartado (a), la mayoría de los estudiantes pudo hallar $x = 1.28$ correctamente. Un número significativo de estudiantes perdió un punto por expresar las respuestas con un número incorrecto de cifras significativas.

El apartado (b) en general fue bien resuelto. Unos cuantos estudiantes desafortunadamente omitieron el dx en la integral mientras que algunos estudiantes, en lugar de hallar la integral definida, dieron detalladas instrucciones de cómo habían obtenido la respuesta a partir de la calculadora.

Pregunta 4

Un número significativo de estudiantes intentó hallar la moda y la media utilizando métodos de análisis matemático, cuando podría sostenerse que estos valores se podían hallar más eficientemente usando la calculadora.

Un porcentaje significativo de los estudiantes demostró no entender las definiciones de media, moda y mediana en el contexto de una función de densidad de probabilidad continua. Un número significativo de estudiantes intentó calcular la mediana en lugar de la media o de la moda. Unos cuantos alumnos redondearon prematuramente el valor que habían obtenido para la moda, utilizando consecuentemente 0,7 por ejemplo, en lugar del valor exacto $\frac{2}{3}$.

Algunos estudiantes llegaron a valores de probabilidades negativos o mayores de 1.

Pregunta 5

Un porcentaje importante de estudiantes no identificó el caso ambiguo y por lo tanto obtuvo un solo valor correcto para AC. Unos cuantos estudiantes redondearon prematuramente sus resultados intermedios (ángulos), generando respuestas finales inexactas.

Pregunta 6

La mayoría de los estudiantes prefirió emplear un método algebraico antes que un método gráfico. La mayoría de los estudiantes halló correctamente $f'(x)$; sin embargo, al intentar hallar $f''(x)$, un número sorprendentemente importante o cometió errores algebraicos al usar la regla del producto o, aparentemente, utilizó una forma incorrecta de la regla del producto. Un número significativo hizo caso omiso de la restricción del dominio y dio $x = \pm\frac{1}{2}$ como el valor de x del punto de inflexión, o trabajó con $x = \frac{1}{2}$ en lugar de $x = -\frac{1}{2}$. La mayoría de los alumnos no pudo justificar correctamente la existencia del punto de inflexión.

Pregunta 7

El apartado (a) fue en general bien resuelto. El error más común fue omitir el coeficiente binomial, o sea, no identificar que la situación respondía a una distribución binomial.

Llegar al valor correcto de n en el apartado (b) resultó un objetivo más difícil. Un número significativo de estudiantes intentó aplicar métodos algebraicos sin percatarse, según parece, de que la ecuación solo podía resolverse por métodos numéricos. Los estudiantes que obtuvieron $n = 10$ muchas veces lo lograron luego de haber intentado primero una resolución algebraica, para finalmente “recurrir” a la calculadora. Algunos estudiantes no especificaron el número entero correspondiente a la respuesta final, mientras que otros dieron $n = 1.76$ como respuesta final.

Pregunta 8

Un número importante de estudiantes tuvo dificultades a la hora de graficar la función recíproca. La mayoría de los alumnos pudo hallar las asíntotas verticales pero tuvo dificultades para graficar las cuatro ramas que componían la función. Un error común fue dar valores incorrectos para las coordenadas del máximo relativo, es decir $(0,-1)$ o $(0,-2)$ en lugar de $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$. Algunos candidatos intentaron graficar la función inversa, mientras que a otros les resultó difícil usar la cuadrícula a escala.

Pregunta 9

Esta fue una pregunta difícil que le causó problemas a la mayoría de los estudiantes. Muchos pudieron reemplazar $z = x + y\mathrm{i}$ en w pero no pudieron luego avanzar mucho más allá. Los errores más frecuentes fueron desarrollar incorrectamente $(x + y\mathrm{i})^2$ o no utilizar el complejo conjugado para racionalizar. Un número pequeño de alumnos llegó a la solución correcta usando $w = \frac{1}{z + z^{-1}}$.

Pregunta 10

Esta pregunta en general no fue bien resuelta. Unos cuantos estudiantes intentaron un “malhadado” método algebraico. La mayoría de los alumnos que usaron la calculadora pudo hallar correctamente una inecuación. Los pocos estudiantes que llegaron a la solución correcta pudieron configurar una pantalla (o pantallas) de visualización adecuada(s), lo que les permitió localizar correctamente ambas inecuaciones.

Pregunta 11

Esta pregunta fue en general bien resuelta, si bien un porcentaje importante de estudiantes perdió un punto por no respetar la consigna referida al grado de aproximación en la respuesta. El apartado (a)(i) resultó sencillo y en general fue muy bien resuelto. En el apartado (a)(ii), unos cuantos alumnos tomaron $\frac{d-6}{1.5}=1.0364...$ en lugar de $\frac{d-6}{1.5}=-1.0364...$. En el apartado (b), fue grato constatar que un número importante de estudiantes pudo plantear y resolver un sistema de ecuaciones, y llegar a los valores correctos de μ y σ. Algunos alumnos redondearon prematuramente los resultados intermedios. En el apartado (c), unos cuantos estudiantes no pudieron expresar una inecuación de Poisson correcta. Afirmar que $\mathrm{P}(T\geq 3)=1-\mathrm{P}(T\leq 3)$ y tomar $\mu=7$ fueron errores frecuentes.

Pregunta 12

Sin comentario.

Pregunta 13

Sin comentario.

Recomendaciones y orientaciones para la enseñanza de futuros estudiantes

- Proveer a los alumnos de una gama de ejercicios de repaso que requieran el uso de la calculadora, de las áreas de contenido que resulten apropiadas. Discutir varios posibles métodos de resolución (por ejemplo: a través de las opciones de tablas, gráficas o métodos numéricos) con los alumnos, y sobre cómo comunicar claramente las resoluciones a los examinadores. En particular, disuadir a los alumnos de usar la frase “hallado con la calculadora” como forma de fundamentar un razonamiento. Asegurarse de que los alumnos entiendan que los datos ingresados en la calculadora deben expresarse usando notación matemática correcta y no la sintaxis o las instrucciones propias de cada marca de calculadora.

- Discutir con los alumnos cuándo es apropiado el uso de la calculadora y cuándo es preciso recurrir a un método analítico (algebraico). Esta discusión debería desarrollarse dentro del contexto de la nueva estructura de exámenes que comenzó en mayo de 2008.

- Asegurarse de que los alumnos sepan que la Prueba 2 también incluirá preguntas o partes de preguntas cuya resolución no requerirá el uso de la calculadora.
- Seguir resaltando la importancia de elaborar un enunciado de cierre correcto cuando se desarrolla una demostración por inducción. Por ejemplo: $P(k)$ verdadero implica $P(k+1)$ verdadero, y dado que $P(1)$ es verdadero, entonces $P(n)$ es verdadero para todo entero positivo.
- Promover que los alumnos usen notación matemática en las expresiones relacionadas con la probabilidad.
- Promover que los alumnos se pregunten si los resultados obtenidos son razonables.
- Discutir con los alumnos el significado de frases tales como “a partir de lo anterior”, “exacto” o “compruebe que” en el contexto de la resolución de preguntas del examen.

Prueba 3

Bandas de calificación del componente

Estadística y probabilidad

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 8	9 - 16	17 - 23	24 - 31	32 - 38	39 - 46	47 - 60

Conjuntos, relaciones y grupos

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 8	9 - 16	17 - 23	24 - 30	31 - 36	37 - 43	44 - 60

Series y ecuaciones diferenciales

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 6	7 - 13	14 - 18	19 - 26	27 - 35	36 - 43	44 - 60

Matemática discreta

Nota final:	1	2	3	4	5	6	7
Puntuaciones:	0 - 7	8 - 14	15 - 19	20 - 26	27 - 33	34 - 40	41 - 60

Generalidades

Los examinadores opinaron que las cuatro opciones estuvieron bien equilibradas en cuanto a extensión y nivel de dificultad. Los comentarios en los formularios G2 reflejaron un consenso general de que las preguntas eran accesibles, estaban bien graduadas y permitían discernir entre niveles de habilidad de los estudiantes.

Áreas del programa y del examen que parecen haber resultado difíciles para los estudiantes

1. **Estadística:** el álgebra referida a la esperanza matemática relacionada con $E(Y^2)$; la elección del contraste (test) apropiado; errores de tipo I y tipo II; el contraste (test) de diferencias de variables dependientes.

2. **Conjuntos:** subgrupos; inyectividad y sobreyectividad; demostraciones relacionadas con el álgebra de funciones; demostraciones relacionadas con conjuntos; relaciones y clases de equivalencia.

3. **Series:** límites usando series; obtención de una serie a partir de otra; series de Maclaurin; la forma correcta de encarar la resolución de integrales impropias; los criterios de convergencia; el método de Euler.

4. **Discreta:** los aspectos más sutiles del algoritmo de Euclides; la aritmética modular; senderos eulerianos; el teorema de Fermat; demostraciones referidas a las relaciones entre número de caras, aristas y vértices.

Áreas del programa o del examen en que los estudiantes demostraron estar bien preparados

En todas las opciones hubo una apreciable falta de comprensión de las sutilezas de la resolución de problemas y de la forma correcta de comunicar el desarrollo de la resolución. Se tuvo la impresión de que el objetivo principal era obtener una respuesta sin preocuparse demasiado por cómo se transmitía la resolución al examinador. Se observó frecuentemente una marcada falta de rigor.

1. Estadística

Los siguientes temas fueron manejados en forma competente: transformación lineal de una variable aleatoria simple; reconocimiento de las distribuciones de probabilidad; valores del parámetro p; uso de la calculadora gráfica; el test de ji-cuadrado. Muchos estudiantes demostraron seguridad al abordar esta opción, aunque la pregunta 5 resultó difícil. En esta pregunta demasiados alumnos perdieron tiempo considerando intervalos de confianza.

2. Conjuntos

Las tablas de Cayley resultaron fáciles. Las leyes de de Morgan se aplicaron en general correctamente. Las propiedades de la simetría y la reflexividad se encararon bien. Los alumnos demostraron saber reconocer el cuadrado latino y tener buen dominio de la aplicación del teorema de Lagrange.

3. Series

La determinación de límites no resultó demasiado difícil y la mayoría de los estudiantes sabía cómo y cuándo aplicar la regla de l´Hôpital. La mayoría de los estudiantes estaban familiarizados con las fracciones simples y muchos lograron resolver la integral impropia. La mayoría de los alumnos pudo resolver la ecuación diferencial. Hallar las derivadas sucesivas de $\ln(\cos x)$ no resultó difícil. Se observó un conocimiento mínimo de los criterios de convergencia.

4. Discreta

Teniendo en cuenta la salvedad hecha anteriormente, la mayoría de los estudiantes supo manejar el algoritmo de Euclides. También se dibujó bien el grafo planar. La demostración de libro de texto pedida en la pregunta 3(a) no le causó problemas a la mayoría de los alumnos y el manejo de los grafos bipartidos fue bueno. Se observó un conocimiento básico de la relación de Euler.

Puntos fuertes y débiles de los estudiantes al abordar las distintas preguntas

1. Estadística

Pregunta 1

Se calculó correctamente $E(Y)$ pero muchos no pudieron seguir adelante para obtener $Var(Y)$ y $E(Y^2)$. Muchas veces el valor de $Var(2)$ se tomó como 2. Muchos alumnos tomaron a V como variable discreta, derivando esto en cálculos del tipo $P(V > 5) = 1 - P(V \leq 5)$.

Pregunta 2

Muchos estudiantes usaron un test de t en esta pregunta. Esto era posible porque la muestra era lo suficientemente grande como para aproximar a la normal. Muchos no se percataron de la necesidad de utilizar un contraste (test) de una cola. Al usar el test de z para la proporción, muchos utilizaron $\hat{p} = 0.04$ en lugar de $\hat{p} = 0.02$. Fueron pocos los estudiantes que usaron la distribución binomial.

Pregunta 3

Si bien esta pregunta fue razonablemente bien resuelta, muchas veces las hipótesis no se definieron con precisión y el hecho de que los dos conjuntos de datos eran dependientes pasó inadvertido para muchos estudiantes.

Pregunta 4

Esta pregunta fue bien resuelta, aunque muchos hicieron caso omiso de la palabra “exacto” en el apartado (a).

Persiste el problema de combinar columnas, y el hecho de que las frecuencias esperadas deben sumar 80 no fue tenido en cuenta por muchos estudiantes. Sigue habiendo confusión en torno a las aproximaciones en los cálculos intermedios y cómo estas afectan el resultado final.

Pregunta 5

Esta pregunta resultó ser la más difícil. La calidad de las resoluciones varió desde muy buena hasta muy floja. Muchos estudiantes consideraron que $P(Tipo\ I) = 1 - P(Tipo\ II)$ cuando en realidad el poder del contraste (test) es $1 - P(Tipo\ II)$.

2. Conjuntos

Pregunta 1

Tanto la tabla como la demostración de sus propiedades de grupo fueron bien abordadas. El orden de los elementos en el apartado (b) fue bien resuelto salvo el de 0, que muchas veces se omitió. Hallar los generadores no resultó difícil, pero muchas veces no se indicaron correctamente los subgrupos. No se comprende bien la noción de subgrupo `propio´.

Pregunta 2

La frase “con referencia a las características de las gráficas” debería de haber resultado una pista bastante obvia, pero demasiados estudiantes se dieron por satisfechos con simplemente describir qué significa inyectiva y sobreyectiva en lugar de explicar qué gráfica tenía cuáles propiedades. Los estudiantes tuvieron considerable dificultad a la hora de presentar un argumento convincente en el apartado (b).

Pregunta 3

Las demostraciones a partir de un diagrama de Venn no son aceptables. Los alumnos que utilizaron las leyes de de Morgan en general pudieron resolver con éxito la pregunta.

Pregunta 4

Esta no fue una pregunta difícil, aunque no hubo buen manejo de la definición de relación, para demostrar acabadamente la transitividad. Fue bueno observar que algunos alumnos usaban una matriz de operación binaria para demostrar la transitividad: un buen método, dado que el conjunto era finito. La demostración del apartado (b) resultó difícil.

Pregunta 5

El apartado (a) no generó problemas, pero hallar los subgrupos de orden 2 (el teorema de Lagrange fue enunciado correctamente por muchos alumnos) sobrepasó la capacidad de algunos estudiantes. Probablemente el problema se haya suscitado porque los elementos del conjunto aparecían fuera de orden alfabético.

3. Series

Pregunta 1

El apartado (a) se resolvió bien, pero demasiadas veces se hizo caso omiso de la instrucción, en el apartado (b), de utilizar series. Los alumnos que tenían en cuenta esta pista llegaban a resoluciones correctas.

Pregunta 2

Esta no fue una pregunta difícil pero muchas veces, en el intento de llegar a una respuesta, se reemplazó la combinación de los logaritmos obtenidos en la integración por un argumento con infinitos espurio. La respuesta $\log(\infty+1)$ se repitió con frecuencia.

Pregunta 3

Algunas tablas incompletas malograron resoluciones que, de no ser por esto, habrían sido buenas. Si bien se pedía que los pasos intermedios se desarrollaran con una aproximación de cuatro cifras decimales, no se pedía lo mismo en la respuesta final, en la que se pretendía el grado de aproximación normalmente pedido en el BI.

Sorprendentemente, algunos estudiantes no pudieron resolver la ecuación diferencial relativamente fácil del apartado (b).

Pregunta 4

Algunos estudiantes tuvieron dificultad en organizar las derivadas, pero la mayoría pudo hallar la serie correctamente. Otra fue la historia a la hora de utilizar la serie para hallar la aproximación de $\ln 2$ en función de π , y fue poco frecuente ver una buena resolución.

Pregunta 5

Se tomaron algunos atajos en la aplicación del criterio de D´Alembert y algunos estudiantes intentaron utilizar el criterio de comparación. Si se procedía con cuidado en la operatoria algebraica, no resultaba difícil hallar el radio de convergencia. Muchos alumnos hallaron el intervalo de convergencia en lugar del radio.

El apartado (b) fue resuelto bien sólo por los mejores estudiantes. Un poco de buen manejo algebraico combinado con una serie auxiliar llevaba rápidamente a la respuesta.

4. Discreta

Pregunta 1

Este problema no era difícil pero sí lo fue presentar una resolución clara y no desarrollar el apartado (b) al lado del apartado (a) en dos columnas. La respuesta sencilla al apartado (c) fue pasada por alto por muchos alumnos.

Pregunta 2

El dibujo del grafo en general no generó ninguna dificultad. La diferenciación entre euleriano y semi-euleriano requiere algo de atención, pero este apartado fue generalmente bien resuelto.

La argumentación sencilla y clara pedida en el apartado (c) venía muchas veces escondida dentro de pequeños ensayos sobre teoría de grafos.

Pregunta 3

El apartado (a) (i) no resultó difícil pero usarlo en el apartado (a)(ii) derivó en que los alumnos trazaran dos o tres rectas correctas, para luego abandonar el problema.

Pregunta 4

El apartado (a) por lo general fue resuelto correctamente pero luego hubo pocos argumentos claros en los apartados (b) y (c).

Pregunta 5

El apartado (a)(i) fue bien resuelto pero muchos estudiantes no leyeron con cuidado el apartado (ii). Decía `añadir una arista´, nada más. Muchos estudiantes presupusieron que era necesario agregar un vértice cuando no lo era.

El apartado (b) no resultó demasiado complicado para muchos estudiantes, si usaban la inecuación $e \leq 3v - 6$.

Recomendaciones y orientaciones para la enseñanza de futuros estudiantes

Hubo muchos exámenes buenos y hasta excepcionales.

Mi preocupación es, aun teniendo en cuenta las presiones que conlleva el enseñar el programa dentro del tiempo disponible, que no se esté haciendo suficiente hincapié en situaciones que van más allá de lo rutinario. El uso de ejemplos poco comunes, tomados de la historia de la matemática, por ejemplo, ayuda a promover el interés y el esfuerzo. El trabajo de Euler es una fuente particularmente buena para el trabajo con series (el problema de Basilea, por ejemplo) y con teoría de grafos. Contrastar las similitudes y las diferencias entre diferentes distribuciones de probabilidad, entre criterios de convergencia, entre métodos algebraicos y numéricos para resolver ecuaciones diferenciales fomenta el juicio crítico matemático en el alumno.